

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

19. Band, Heft 7

3. März 1939

S. 289—336

## Algebra und Zahlentheorie.

### Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Krull, Wolfgang: Dimensionstheorie in Stellenringen. J. reine angew. Math. 179, 204—226 (1938).

Ein kommutativer Ring  $\mathfrak{R}$  mit Einheitselement heißt Stellenring, wenn er die Maximalbedingung erfüllt und wenn die Menge  $\mathfrak{m}$  aller Nichteinheiten das einzige maximale Primideal in  $\mathfrak{R}$  ist.  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sei eine feste, minimale Basis von  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$  heiße  $K$ , der Polynomring  $K[x_1, \dots, x_n]$  heiße  $\mathfrak{P}$ . In  $\mathfrak{R}$  ist der Durchschnitt der Potenzen von  $\mathfrak{m}$  gleich  $(0)$ , daher gibt es zu jedem  $a \in \mathfrak{R}$  wenigstens eine natürliche Zahl  $\varrho$  und dazu eine homogene Form  $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  vom Grad  $\varrho$  mit Koeffizienten  $c_i \in \mathfrak{R}$ , die nicht alle in  $\mathfrak{m}$  liegen, so daß  $a \equiv \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(\mathfrak{m}^{e+1})$  ist. Ersetzt man die  $\alpha_i$  in  $\varphi$  durch die  $x_i$  und die Koeffizienten  $c_i$  durch ihre Restklassen  $\bar{c}_i$  in  $K$ , so erhält man eine Form  $\bar{\varphi}$  vom Grade  $\varrho$  in  $\mathfrak{P}$ , die Anfangsform von  $a$ . Hat jedes Element  $a$  von  $\mathfrak{R}$  nur eine Anfangsform, so heißt  $\mathfrak{R}$   $p$ -Reihenring. In diesem Fall ist  $\mathfrak{R}$  nullteilerfrei und ganz abgeschlossen. — Ist  $\mathfrak{a}$  ein Ideal in  $\mathfrak{R}$ , so bilden die Anfangsformen der Elemente von  $\mathfrak{a}$  ein Formenideal  $\bar{\mathfrak{a}}$  in  $\mathfrak{P}$ , das Leitideal von  $\mathfrak{a}$ . Der Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{a}$  und  $\bar{\mathfrak{a}}$  wird nach dem Vorbild von E. Lasker [Math. Ann. 60, 20—116 (1905)] eingehend untersucht. Wird die Dimension bzw. der Dimensionsdefekt eines Ideals in üblicher Weise mit Hilfe der Längen der zugehörigen Primidealketten erklärt, so gilt, daß in jedem Stellenring  $\mathfrak{a}$  und  $\bar{\mathfrak{a}}$  dieselbe Dimension haben und daß in einem  $p$ -Reihenring bei jedem Primideal die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt gleich der Basiszahl  $n$  von  $\mathfrak{m}$  ist. Ist  $\bar{\mathfrak{a}}$  ungemischt  $\mu$ -dimensional, so auch  $\mathfrak{a}$  (vgl. auch die Vorankündigung dieser Sätze; dies. Zbl. 16, 340). — Verf. erhält Aufschlüsse über die Struktur der Stellenringe:  $\mathfrak{R}$  sei ein Repräsentantensystem in  $\mathfrak{R}$  von  $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ , mit  $\varphi_i(\alpha)$  werde eine homogene Funktion  $i$ -ten Grades in  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  mit Koeffizienten aus  $\mathfrak{R}$  bezeichnet. Dann gibt es zu jedem  $a \in \mathfrak{R}$  Formen  $\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \dots$ , so daß  $a - (\varphi_0(\alpha) + \dots + \varphi_e(\alpha))$  in  $\mathfrak{m}^{e+1}$  liegt für jedes  $e$ .  $a$  läßt sich also die unendliche Reihe  $\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha) + \dots$  zuordnen. Ist  $\mathfrak{R}$   $p$ -Reihenring, so gehört zu  $a$  genau eine solche Reihenentwicklung. Ist  $\mathfrak{R}$  speziell als Teilkörper von  $\mathfrak{R}$  wählbar, so wird  $\mathfrak{R}$  homomorph einem Unterring  $\Pi$  des Ringes  $\Pi^*$  aller formalen Potenzreihen über  $\mathfrak{R}$ . Ist  $\mathfrak{R}$  außerdem  $p$ -Reihenring, so wird  $\mathfrak{R}$  isomorph  $\Pi$ . Durch Hinzunahme aller verträglichen Kongruenzensysteme nach den  $\mathfrak{m}^e$  kann  $\mathfrak{R}$  nach bekannten Mustern stets zu einem perfekten Stellenring erweitert werden. Verf. skizziert in § 7 einen Versuch, nach dem Muster der Hasse-Schmidtschen Theorie der diskret bewerteten Körper (vgl. dies. Zbl. 8, 52) einen Überblick über sämtliche perfekten Stellenringe zu gewinnen. — In § 8 wird für beliebige Ringe, die die Maximalbedingung erfüllen, bewiesen, daß ein Primideal  $\mathfrak{p}$ , das minimales Oberideal eines Ideals  $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_r)$  mit  $r$ -gliedriger Basis ist, in  $\mathfrak{R}$  höchstens den Dimensionsdefekt  $r$  hat. Durch ein Gegenbeispiel wird die Vermutung widerlegt, daß in einem Ring mit Maximalbedingung jedes Primideal endliche Dimension hat. Schließlich werden in §§ 9, 10 die Betrachtungen über die Leitideale auf Potenzreihenringe über Ringen, die die Maximalbedingung erfüllen, verallgemeinert. G. Köthe.

Ward, Morgan: Structure residuation. Ann. of Math., II. s. 39, 558—568 (1938).

Let  $L$  be any lattice (structure), and let  $a, b$  be fixed elements of  $L$ . In general, the union  $u$  of the elements  $x$  satisfying  $x \cap b \leq a$ , will not itself satisfy  $u \cap b \leq a$ ; in case it does, it may be called the "residual" of  $b$  relative to  $a$ , and denoted  $a : b$ . The author shows that if all pairs of elements of  $L$  have residuals, then  $L$  is distributive



— while the converse is true under weak additional assumptions (existence of  $O$ , ascending chain condition). Other results are also given, which relate to ideas of Fr. Klein (this Zbl. 3, 291). *Garrett Birkhoff* (Cambridge, U. S. A.).

**Wajnsztejn, Duwid:** Binäre Matrizenformeln für die Clifford-Zahlen. Ann. Soc. Polon. math. 17, 57—66 (1938).

Die bekannte Cliffordsche Algebra vom Range  $2^n$  (vgl. Wajnsztejn, dies. Zbl. 18, 292) läßt sich durch zweireihige Matrices darstellen, deren Elemente der Cliffordschen Algebra vom Range  $2^{n-1}$  entnommen werden. *van der Waerden*.

**Albert, A. A.:** A note on normal division algebras of prime degree. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 649—652 (1938).

Verf. knüpft an den Wedderburnschen Beweis für die Zyklizität aller normalen Divisionsalgebren vom Grade 3 über einem Körper mit Charakteristik  $\neq 3$  an, den er selbst so modifiziert hat, daß auch der Fall der Charakteristik 3 einbezogen wird. Dieser Beweis beruht auf der Tatsache, daß der Normalkörper eines nicht normalen kubischen Körpers zyklisch über seinem quadratischen Teilkörper ist. Mit Hinblick auf die noch unentschiedene Frage, ob der Wedderburnsche Satz sich auf beliebigen Primzahlgrad  $p$  verallgemeinert, ist daher der folgende Satz von Interesse, der im Spezialfall  $p = 3$ ,  $m = 2$  erneut die Zyklizität der normalen Divisionsalgebren vom Grade 3 über einem Körper der Charakteristik 3 feststellt: Eine normale Divisionsalgebra vom Grade  $p$  über einem Körper  $k$  der Charakteristik  $p$ , die einen normalen Zerfällungskörper vom Grade  $p \cdot m$  über  $k$  mit einem zyklischen Teilkörper vom Grade  $m$  über  $k$  hat, wo  $m$  prim zu  $p$  ist, ist zyklisch. *H. Hasse* (Göttingen).

**Gantmacher, Félix:** Sur la représentation canonique des substitutions isomorphiques d'un groupe semi-simple complexe de Lie. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 208—210 (1938).

Let  $\mathfrak{r}$  be a semi-simple Lie algebra over the complex field and  $\mathfrak{A}$  its group of automorphisms where  $\mathfrak{A} = \sum \mathfrak{A}_i$ ,  $\mathfrak{A}_i$  the cosets of  $\mathfrak{A}_0$  the component of 1. The author announces without proof the following results. If  $A \in \mathfrak{A}_i$  is regular in the sense that it has the minimum number  $n_i$  of roots  $= 1$  then  $\mathfrak{M}_A$  the connected set of automorphisms containing  $A$  and commutative with  $A$  is itself commutative and all of its transformations have simple elementary divisors. If  $A, B \in \mathfrak{A}_i$  are regular there exists a  $U$  in  $\mathfrak{A}_0$  such that  $\mathfrak{M}_B = U^{-1} \mathfrak{M}_A U$ . If  $C$  has simple elementary divisors corresponding to the root 1,  $C \in$  an  $\mathfrak{M}_A$ . As Cartan has shown [Bull. Sc. Math. Paris 49, 361 (1931)], the  $\mathfrak{A}_i$  correspond to cosets in a certain group of permutations of the roots of  $\mathfrak{r}$ . As a consequence of this and his own results the author announces that any  $C$  of the above type has the form  $U^{-1} Z U$  where  $U \in \mathfrak{A}_0$  and  $Z$  has a certain canonical form. *Jacobson*.

**Yosida, Kôzaku:** On the fundamental theorem of the tensor calculus. Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 211—213 (1938).

The author shows that if  $\tilde{\mathfrak{G}}$  is a connected, simply connected semi-simple Lie group and  $\mathfrak{D}$  a connected group of matrices to which  $\tilde{\mathfrak{G}}$  is continuously homomorphic then the homomorphism is open (Gebietstreu) and  $\mathfrak{D}$  is a Lie group. The Lie algebra of  $\tilde{\mathfrak{G}}$  is homomorphic to that of  $\mathfrak{D}$  and conversely if the Lie algebra of  $\tilde{\mathfrak{G}}$  is homomorphic to a Lie algebra of matrices (over the real field) the latter generate a connected Lie group to which  $\tilde{\mathfrak{G}}$  is continuously homomorphic. In place of Cartan's algebraic treatment of the representation problem for the Lie algebras he employs Weyl's unitary argument to replace  $\tilde{\mathfrak{G}}$  by a compact group. For these the representations may be determined by analytic methods (Peter-Weyl, Math. Ann. 97; van Kampen, Ann. of Math. 37 or this Zbl. 14, 17). *Jacobson* (Chapel Hill, N. C.).

**Krasner, Marc:** Une généralisation de la théorie locale des corps de classes. Généralisation du symbole de Hasse et la loi d'isomorphisme pour les extensions galoisiennes. Analogie locale de la loi de densités de Tschebotarôw. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1940—1942 (1938).

$G$  étant un groupe d'ordre fini, les ensembles d'élément conjugués de ce groupe



constituent un hypergroupe au sens de Marty, quand on y définit comme produit  $C \ominus C'$  de deux classes l'ensemble des classes  $C''$  engendrées par les éléments de la forme  $ab$  avec  $a \in C$ ,  $b \in C'$ . On désignera par  $\langle G \rangle$  cet hypergroupe et par  $\langle a \rangle$  la classe engendrée par l'élément  $a$  de  $G$ . —  $k$  étant un corps de nombres  $p$ -adiques et  $K/k$  une extension galoisienne finie de  $k$ ; soient  $K'$ , ( $K' \supseteq K$ ) et  $K''$  deux extensions finies de  $k$  telles que  $K'K''/K'$ ,  $K'K''/K''$  soient non ramifiées. Soit  $\sigma_{\alpha''}$  l'automorphie de  $K$  définie par le symbole d'Artin  $\left(\frac{K'K''/K''}{(\alpha'')}\right)$  avec  $\alpha'' \in K''$ . L'auteur propose comme généralisation du symbole de reste normique la classe  $\langle \sigma_{\alpha''} \rangle$  définie dans le groupe de Galois  $G$  de  $K/k$  et il la désigne par  $(g, K/k)$  avec  $g = N_{K''/k}(x - \alpha'')$ .  $P = g_1^{m_1} \cdot g_2^{m_2} \cdot \dots \cdot g_r^{m_r}$  étant un élément du groupe multiplicatif engendré par les polynômes du type  $g_i = N_{K^{(i)}/k}(x - \alpha^{(i)})$ , on écrit  $(P, K/k) = \langle \sigma_{\alpha^{(1)}}^{m_1} \rangle \ominus \langle \sigma_{\alpha^{(2)}}^{m_2} \rangle \dots \ominus \langle \sigma_{\alpha^{(r)}}^{m_r} \rangle$ .  $C(\gamma)$ , ( $\gamma \in \langle G \rangle$ ) désignant l'ensemble des  $P$  tels que  $\gamma \in (P, K/k)$ , l'auteur énonce pour les ensembles  $C(\gamma)$ , en définissant le produit  $C(\gamma) \ominus C(\gamma')$  d'une façon appropriée, des lois d'existence, d'isomorphie, d'ordination et de translation semblables à celles de la théorie des corps de classes. Cahit Arf (Göttingen).

**Krasner, Marc:** Une généralisation de la théorie locale des corps de classes. Conducteur, loi d'unicité, loi d'ordination, loi d'existence. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1534—1536 (1938).

Soit  $k$  un corps de nombres  $p$ -adiques de degré fini. L'auteur désigne sous le nom de polynôme régulier du type  $\{f, e\}$  les polynômes irréductibles dans  $k$  avec coefficients du terme du plus haut degré 1 et tel que  $g(x) = 0$  définisse un élément primitif de l'idéal premier d'une extension de degré  $ef$  et d'ordre de ramification  $e$ . On dit que deux polynômes réguliers  $g, g'$  du type  $\{f, e\}$  sont  $\ast$ -congrus mod  $p^u$  si l'ordre en  $p$  de  $g(\alpha) - g'(\alpha)$  est supérieur ou égal à  $u + f - 1$  pour tout élément algébrique  $\alpha$  d'ordre  $\frac{1}{e}$  en  $p$ . — En désignant par  $S_{K/k}^{(f, e)}$  l'ensemble des polynômes réguliers du type  $\{f, e\}$  qui définissent des extensions  $K'/k$  contenant une extension donnée  $K/k$ , l'auteur énonce la propriété suivante: Il existe des nombres finis  $u$  tels qu'avec tout polynôme  $g \in S_{K/k}^{(f, e)}$  les polynômes  $g'$   $\ast$ -congrus à  $g$  mod  $p^u$  soient aussi contenus dans  $S_{K/k}^{(f, e)}$ . Soit  $\varphi_{K/k}^{(f, e)} + 1$  la borne inférieure des nombres  $u$  ainsi définis. Les  $\varphi_{K/k}^{(f, e)}$  sont bornés supérieurement quand  $\{f, e\}$  décrit tous les types possibles. La borne supérieure des  $\varphi_{K/k}^{(f, e)}$  est un nombre rationnel  $\varphi_{K/k}$  et on a  $\varphi_{K/k}^{(f, e)} = [e\varphi_{K/k}]/e$  ou  $[a]$  désigne la partie entière de  $a$ . L'expression  $\mathfrak{F}_{K/k} = p^{1+\varphi_{K/k}}$  s'appelle le conducteur de  $K/k$ . — L'auteur donne ensuite dans le cas  $p \nmid 2$  un critère permettant de reconnaître si un ensemble  $S$  de polynômes ayant les propriétés précédentes est un  $S_{K/k}^{(f, e)}$  avec  $[K:k] = f'e$ . Cahit Arf (Göttingen).

**Krasner, Marc:** Une généralisation de la théorie locale des corps de classes. Valeur de conducteur. Interprétation d'une formule de M. Artin. Loi de limitation pour les extensions galoisiennes. Structure des  $S_{K/k}^{(f, e)}$  et sa liaison avec la théorie de la ramification. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1696—1699 (1938).

En conservant les notations de sa note précédente et en désignant par  $v_i$  ( $i = -1, 0, 1, \dots, m-1$ ) les nombres de ramifications, par  $n_i$  le nombre d'éléments de l'ensemble de ramifications du même indice  $i$ , pour l'extension  $K/k$  (voir Zbl. 12, 8)

l'auteur donne pour le nombre  $\varphi_{K/k}$  l'expression  $\varphi_{K/k} = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{m-1} n_i(v_i - v_{i-1})$ . Il constate

la coïncidence des conducteurs  $f_x$  de M. Artin avec les  $\mathfrak{F}_{K/k}$  correspondants. — Dans la deuxième partie de sa note l'auteur s'occupe du nombre  $N_t^{(f, e)}(K/k)$  des  $\ast$ -classes (mod  $p^{1+t}$ ) contenues dans  $S_{K/k}^{(f, e)}$  pour  $t > \varphi_{K/k}$ . Dans le cas où  $K/k$  est galoisien désignons par  $n_i(g)$  la borne inférieure du nombre  $n_i^{(e)}(g)$  des  $\ast$ -classes (mod  $p^{1+e+t}$ ) contenues dans l'ensemble  $S_i(g)$  d'éléments  $g'$  de  $S_{K/k}^{(f, e)}$   $\ast$ -congrus (mod  $p^{1+t}$ ) à  $g$ . Soit en outre  $\mathfrak{M}_i^{(\pi)}$  l'ensemble des classes (mod  $p^e$ ) contenant un  $\pi^{-e'(f'+t)}g'(\pi)$  avec



$g(\pi) = 0$ ,  $n_i(g) = n_i^*(g)$ ,  $g' \in S_i(g)$ . L'auteur constate la liaison étroite de  $n_i(g)$  et de  $\mathcal{M}_i^{(\pi)}$  avec la théorie de la ramification. *Cahit Arf* (Göttingen).

### Zahl- und Funktionenkörper:

**Beeger, N.G.W.H.:** On some new congruences in the theory of Bernoulli's numbers. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 684—688 (1938).

This paper gives general congruences in which a bernoulli number modulo  $p^i$  is expressed linearly in terms of smaller bernoulli numbers with subscripts differing by multiples of  $(p-1)/2$ . In this way it is possible to determine  $B_n \pmod{p^i}$  from existing tables of bernoulli numbers when  $B_n$  lies beyond the limit of the tables. The following congruence (missprinted in the paper) is typical

$$(-1)^{i-1} \frac{B_{np}}{np} \equiv \sum_{s=1}^i (-1)^{(s-1)(\mu+1)} \binom{2n}{s-1} \binom{2n-s}{i-s} \frac{B_{n+(s-1)\mu}}{n+(s-1)\mu} \pmod{p^i}$$

where  $p$  is a prime  $> 3$ ,  $2n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ ,  $\mu = (p-1)/2$ , and the notation for bernoulli numbers is that in which  $B_1 = 1/6$ ,  $B_2 = 1/30$ , etc. In the especially interesting case for the Fermat problem of the irregular prime  $p$  for which  $B_n \equiv 0 \pmod{p}$ , the above congruence gives for  $i=2$

$$B_{np} \equiv \frac{-p}{2n-1} \{ (2n-1)^2 B_n - (-1)^{(p-1)/2} 4n^2 B_{n+\mu} \} \pmod{p^2}$$

The author has used this congruence to verify directly some of Vandiver's results [Trans. Amer. Math. Soc. 31, 639—642 (1929)]. *Lehmer* (Cambridge, England).

**Chowla, Inder:** Generalization of a theorem of Dickson. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 8, 223—226 (1938).

Sind  $k$  und  $p$  ungerade Primzahlen, so hat nach Dickson [J. f. Math. 135 (1909)] die Kongruenz  $x^k + y^k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  stets eine Lösung  $x, y$  mit  $xy \not\equiv 0 \pmod{p}$ , wenn  $p \geq (k-1)^2(k-2)^2 + 6k - 2$  ist. Verf. beweist den allgemeineren Satz: Sei  $p$  eine Primzahl,  $(n, p) = 1$ , so gilt für die Lösungsanzahl  $N$  der Kongruenz

$$x^k + y^k \equiv n \pmod{p} \quad (1 \leq x < p, 1 \leq y < p)$$

stets

$$N \geq p - (k-1)(k-2)\sqrt{p} - (3k-1).$$

Es existiert also für  $k \geq 6$  immer eine Lösung, wenn  $p \geq (k-1)^2(k-2)^2 + 6k - 2$  ist. — Für die untere Grenze von  $p$  ergibt sich also gerade wieder die Dickson'sche Zahl, der elementare Beweis gründet sich auf Sätze von Hardy und Littlewood. Das Ergebnis ist ein Spezialfall der Lösungszahlabeschätzungen von Davenport und Hasse (s. dies. Zbl. 10, 338), die ihre Resultate durch Betrachtung der Zetafunktion algebraischer Funktionenkörper gewannen. *H. L. Schmid* (Gießen).

**Heilbronn, H.:** On Euclid's algorithm in real quadratic fields. Proc. Cambridge Philos. Soc. 34, 521—526 (1938).

Bisher konnte nur für endlich viele reelle quadratische Körper gezeigt werden, daß in ihnen der euklidische Algorithmus gilt, während man von unendlich vielen quadratischen Körpern beweisen konnte, daß sie ohne euklidischen Algorithmus sind. Es entstand die Frage, ob der euklidische Algorithmus nur in endlich vielen Körpern gilt. Erdős und Ko bejahten diese Frage für den Fall, daß die Körperdiskriminante eine Primzahl ist (dies. Zbl. 18, 106). Der Verf. beweist nun allgemein mit Methoden der analytischen Zahlentheorie ähnlich wie Erdős und Ko, daß es nur endlich viele quadratische Körper gibt, in denen der euklidische Algorithmus gilt. Leider ergibt sich aus dem Beweis keine feste obere Schranke. *Hofreiter* (Wien).

**Oldenburger, Rufus:** Rational equivalence of a form to a sum of  $p$ th powers. Trans. Amer. Math. Soc. 44, 219—249 (1938).

A field  $\varphi$  is called  $(n, p)$ -proper unless it is of prime characteristic which divides one of the multinomial coefficients  $p!/(r!s!\dots t!)$ ,  $r+s+\dots+t=p$ , where the number of summands is  $\geq 2$  and  $\leq n$ . The symmetric matrix  $A = (a_{ij} \dots m)$  of the



$n$ -ary form  $F = a_{ij\dots m} x_i x_j \dots x_m$  of degree  $p$  with coefficients in  $\varphi$  is unique if and only if  $\varphi$  is  $(n, p)$ -proper. The principal determinant rank of  $A$  (W. Mayer, this Zbl. 12, 278) is the rank of the 2-way matrix  $(a_{i\tau})$  of  $n$  rows and  $n^{p-1}$  columns. The principal factorization rank of  $A$  is the minimum value of  $\varepsilon$  for which  $A$  can be written

$$A = \left( \sum_{\alpha=1}^{\varepsilon} b_{\alpha i} c_{\alpha j} \dots d_{\alpha m} \right).$$

It is proved that if  $\varphi$  is  $(n, p)$ -proper, these two ranks of an  $n$ -ary form  $F$  of degree  $p$  are equal if and only if  $F$  is equivalent under non-singular linear transformations in  $\varphi$  to a form  $a_1 x_1^p + a_2 x_2^p + \dots + a_n x_n^p$ , and  $\sigma = n$  if and only if each of these ranks is  $n$ .

MacDuffee (Madison).

Fogels, E.: Über die Möglichkeit einiger diophantischer Gleichungen 3. und 4. Grades in quadratischen Körpern. Comment. math. helv. 10, 263—264 u. 265—269 (1938).

The author considers the solution of the equations

$$X^3 + Y^3 + AZ^3 = 0 \quad (1), \quad X^3 + AY^3 + BZ^3 = 0 \quad (2), \quad X^4 + AY^4 - BZ^4 = 0 \quad (3)$$

in which  $A$  and  $B$  are rational while  $X, Y, Z$  are integers in the quadratic field  $K(\sqrt{m})$ . It is shown that, for every  $A$ , (1) has solutions in infinitely many fields and that it has infinitely many solutions in each field. In case (2) has no rational solution other than the trivial solution  $(0, 0, 0)$ , as for example when  $A = 7$ ,  $B = 2$ , then (2) has no solution in any quadratic field. For (3) to have a non-trivial solution in quadratic integers it is necessary that at least one of the equations

$$a^2 + Ab^4 - Bc^4 = 0, \quad a^4 + Ab^2 - Bc^4 = 0, \quad a^4 + Ab^4 - Bc^2 = 0$$

have a non-trivial solution in rational integers  $a, b, c$ . This fact is the basis of the author's discussion of (3). He exhibits cases in which (3) is insoluble except in two quadratic fields, 25 cases in which (3) has no solution in any field and cases in which a single solution can be given in each of an infinite set of quadratic fields. Lehmer.

Haentzschel, E.: Zur Theorie der diophantischen Gleichungen dritten und vierten Grades. S.-B. Berlin. math. Ges. 37, 53—61 (1938).

Es handelt sich um die diophantische Gleichung  $z^3 = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = f(x)$  mit der Bedingung, daß  $f(x) = 0$  eine rationale Wurzel hat. Durch eine besondere Transformation geht die Gleichung über in  $v^2 = 4s^3 + m^2$ . Anwendung auf zwei von Diophant gegebene Aufgaben. Weiter wird das Problem behandelt: Eine diophantische Aufgabe sei gelöst; neue Aufgaben anzugeben, deren Lösung abhängig ist von derjenigen der gelösten Aufgabe. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

James, Glenn: A higher upper limit to the parameters in Fermat's equation. Amer. Math. Monthly 45, 439—445 (1938).

Verf. gibt einen Beweis des Satzes von Sophie Germain: Ist  $x^n + y^n = z^n$ ,  $xyz \not\equiv 0 \pmod{n}$ , so ist  $x = s(2c_1 n^2 + 1)$  usw., wo  $z - y = s^n$ . Hieraus wird [unter Benutzung der in einer früheren Arbeit bewiesenen Ungleichheiten:  $x: n > z - y$ ,  $z - y \geq (2cn + 1)^n$ ,  $c > 0$ ; dies. Zbl. 10, 7] abgeleitet:  $x \geq n(2cn^2 + 1)^n$ ,  $c > 0$ . Ref. (Mess. of Math. 55, 17) hat bewiesen:  $n > 14000$ ; daraus ergibt sich eine sehr hohe untere Grenze für  $x$ . Verf. hat diese schließlich noch etwas erhöht:  $x \geq (111:77) n(2cn^2 + 1)^n$ . N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Segal, David: A note on Fermat's last theorem. Amer. Math. Monthly 45, 438—439 (1938).

Ist  $x^n + y^n + z^n = 0$ ,  $xyz$  prim zu  $n$ , so ist  $x + y = r^n$ ,  $y + z = s^n$ ,  $z + x = t^n$ . Es wird ein einfacher Beweis gegeben des Satzes:  $r + s + t \neq 0$ . G. James (dies. Zbl. 10, 7) hat einen geometrischen Beweis dieses Satzes gegeben. N. G. W. H. Beeger.

Xerudakis, G., und K. Phasulakis: Zum großen Fermatschen Satz. Bull. Soc. Math. Grèce 19, 32—38 (1938) [Griechisch].

Werden  $\alpha, \beta, \gamma$  durch die Identität in  $w$

$$(w - x)(w - y)(w - z) \equiv w^3 - 2\alpha w^2 + \beta w - 2\gamma$$



definiert, so ist für ganzes  $\nu \geq 3$

$$x^\nu + y^\nu - z^\nu = 2\alpha(x^{\nu-1} + y^{\nu-1} - z^{\nu-1}) - \beta(x^{\nu-2} + y^{\nu-2} - z^{\nu-2}) + 2\gamma(x^{\nu-3} + y^{\nu-3} - z^{\nu-3}).$$

Die Verff. ersetzen hiernach die Fermatsche Gleichung durch die Gleichung

$$2\alpha(x^{\nu-1} + y^{\nu-1} - z^{\nu-1}) - \beta(x^{\nu-2} + y^{\nu-2} - z^{\nu-2}) + 2\gamma(x^{\nu-3} + y^{\nu-3} - z^{\nu-3}) = 0 \quad (1)$$

und beweisen für  $\nu = 3$  durch eine langwierige Betrachtung die Unlösbarkeit der letzteren in von Null verschiedenen ganzen Zahlen  $x, y, z$ . Dann zeigen sie, daß die drei Gleichungen

$$x^\mu + y^\mu = z^\mu \quad (\mu = \nu - 1, \nu - 2, \nu - 3)$$

nicht gleichzeitig ganzzahlig erfüllt werden können. Zum Schluß leiten sie unter Benutzung der  $\alpha, \beta, \gamma$  die ganzzahligen Lösungen von  $x^2 + y^2 = z^2$  her. *Bessel-Hagen.*

**Gravé, D.: Des nombres premiers.** J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 1—16 u. franz. Zusammenfassung 16 (1938) [Ukrainisch].

Verf. gibt eine Übersicht über die Arbeiten Tschebychevs und Riemanns betr. der Primzahlverteilung. Zu den dort aufgezählten Arbeiten wäre noch einzuschließen: der von C. Siegel herausgegebene Nachlaß Riemanns zur analytischen Zahlentheorie [vgl. Quell. Stud. Gesch. Math. 2, 45—80 (1932); dies. Zbl. 4, 105] sowie die Doktorthese von I. Ivanow [Über einige Fragen, die im Zusammenhang mit der Primzahlverteilung sind (russisch). Petersburg 1901], in welcher eine wenig bekannte Formel Tschebychevs ausgeführt wird, die unlängst Popoff auf den Brunschen Ideenkreis angewandt hat [C. R. Acad. Sci. URSS 2, 194—196 (1935); dies. Zbl. 11, 390]. *Lubelski (Warschau).*

**Selberg, Sigmund: Einige zahlentheoretische Funktionen.** Arch. Math. og Naturvid. 42, Nr 1/2, 1—13 (1938).

Für ganzes  $n > 0$ , ganzes  $h > 1$  und komplexes  $\Delta$  sei  $s(n)$  die Anzahl der Primfaktoren,  $s_n$  die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von  $n$ ;  $v_h(n, \Delta) = 0$ , wenn  $n$  durch  $h$ -te Potenz einer Primzahl teilbar ist, sonst  $v_h(n, \Delta) = \Delta^{s(n)}$ ;

$$N_h(x; \Delta) = \sum_{n \leq x} v_h(n, \Delta), \quad H_h(x; \Delta) = \sum_{n \leq x} \frac{v_h(n, \Delta)}{n}, \quad I_h(x; \Delta) = \sum_{n \leq x} \frac{v_h(n, \Delta)}{n} \log n.$$

I. Für  $|\Delta| \leq 1$ ,  $\Delta \neq 1$  ist  $N_h(x; \Delta) = o(x)$ ,  $H_h(x; \Delta) = o(\log x)$ ; aus der ersten Formel folgt: ist  $k > 1$  und ist  $Q_k^{(h)}(x)$  die Anzahl aller  $n \leq x$  mit  $s(n) \equiv l \pmod{k}$ , die durch keine  $h$ -te Primzahlpotenz teilbar sind, so ist  $Q_k^{(h)}(x) \sim k^{-1}(\zeta(h))^{-1}x$ . —

II. Für  $|1 + \Delta| < 1$ ,  $|\Delta| \leq 1$  ist  $H_h(x; \Delta) = o(1)$ ,  $I_h(x; \Delta) = o(\log x)$ ,  $I_2(x; \Delta) = \Delta \sum_{n \leq x} n^{-1}(1 + \Delta)^{s_n} + o(1)$ . — III. Für  $|1 + \Delta| < 1$ ,  $|\Delta| < 1$  ist  $I_h(x; \Delta)$

$= (1 + \Delta)^{-1} \cdot \Delta \cdot \log x \cdot \bar{H}_h(x; \Delta) + o(1)$ . — Die Formeln für  $H_h, N_h$  werden durch einfache Zurückführung auf den Fall  $h = 2$  bewiesen, den der Verf. in seiner Arbeit „Zur Theorie der quadratfreien Zahlen“ (erscheint in der Math. Z.) behandelt hat.

*Jarník (Praha).*

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Bernays, Paul: A system of axiomatic set theory. Pt. I.** J. Symbolic Logic 2, 65—77 (1937).

Bernays gibt eine Axiomatisierung der Mengenlehre, die sich (wie diejenige v. Neumanns, J. reine angew. Math. 154) unter Vermeidung der Unbestimmtheit der Zermeloschen „definiten Eigenschaft“ innerhalb der 1. prädikatenlogischen Stufe bewegt und Mengen (die Elemente sein können) von Klassen (die nur als Bereiche fungieren) unterscheidet; jede Menge stimmt mit einer Klasse elementenweise überein, nicht aber jede Klasse mit einer Menge. Im Gegensatz zu der abstrakten Allgemeinheit der v. Neumannschen Axiomatisierung geht die Bernaysche von Begriffen und Axiomen aus, die dem Rahmen der Mengenlehre unmittelbar angepaßt sind. „The purpose of modifying the von Neumann system is to remain nearer to the structure of the original Zermelo system and to utilize at the same time some of the set-theoretic con-



cepts of the Schröder logic and of 'Principia Mathematica' . . . As will be seen, a considerable simplification results from this arrangement." — In dem vorliegenden 1. Teil werden die ersten 3 Axiomgruppen mit ihren wichtigsten Folgerungen vorgeführt: I. Extensionalitätsaxiome, II. Axiome der direkten Konstruktion von Mengen (die Gruppen I, II entsprechen den Zermeloschen Axiomen I, II), III. Axiome für die Konstruktion von Klassen. Die Axiome III gestatten u. a. unmittelbar, das Komplement einer Klasse, Vereinigung und Durchschnitt zweier Klassen sowie Vorbereich, Konversklasse und Feld einer Paarklasse zu benutzen. Der folgende grundlegende „Klassensatz“ wird bewiesen: die Aussageform  $\mathfrak{P}(v_1, \dots, v_k)$  sei aus der Gleichheitsrelation und den Enthaltenseinsrelationen mittels der logischen Verknüpfungen der Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Negation und der Bindung von Mengenvariablen durch All- und Seinsquantoren aufgebaut; etwa auftretende Parameter seien in bestimmter Weise fixiert. Dann gibt es nach den Axiomen III eine Klasse, deren Elemente diejenigen  $k$ -tupel  $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  sind, für die  $\mathfrak{P}(v_1, \dots, v_k)$  gilt. — Dieser Satz zieht u. a. die Existenz von allgemeinen Vereinigungs- und Durchschnittsmengen und von Potenzmengen (bzw. -klassen) nach sich. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

**Mostowski, Andrzej:** Über den Begriff einer endlichen Menge. *Vorl. Mitt. C. R. Soc. Sci. Varsovie* 31, 13—20 (1938).

Nennt man einen Satz ein „mögliches Unendlichkeitsaxiom“ (U), wenn er die Existenz von Mengen jeder endlichen Mächtigkeit impliziert, so gilt: In einer  $\omega$ -widerspruchsfreien, arithmetisierbaren, logisch-symbolischen „Sprache“ (die genauere Präzisierung wird angegeben), die nicht bereits ein U zu ihren beweisbaren Sätzen zählt, ist kein schwächstes Unendlichkeitsaxiom, d. h. kein solches U, das von allen U impliziert wird, aufstellbar. Der (nicht angegebene) Beweis dieses Satzes sowie der eines dualen Satzes über „mögliche Endlichkeitsdefinitionen“ und die Beweise einiger anschließender Sätze bedienen sich der Gödelschen Arithmetisierungsmethode. — Den Tarskischen Endlichkeitsdefinitionen (I—V) — vgl. das nachsteh. Ref. — wird als Tarskische Definition VI angefügt: Eine Menge ist endlich, wenn sie nicht mit ihrer Paarmenge gleichmächtig ist. Es werden einige Sätze über den Zusammenhang dieser Endlichkeitsdefinitionen untereinander und mit dem Auswahlaxiom angegeben.

*Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

**Lindenbaum, Adolf, und Andrzej Mostowski:** Über die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und einiger seiner Folgerungen. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* 31, 27—32 (1938).

Unter Skizzierung von Teilbeweisen wird angegeben: Im Rahmen des (als widerspruchsfrei vorauszusetzenden) Systems der Axiome der Beschränktheit, Paarung, Vereinigung, Potenzmenge, Aussonderung, Ersetzung und Unendlichkeit ist das Auswahlaxiom zum Beweise der folgenden Sätze unentbehrlich: 1. zu jeder Menge disjunkter Paare gibt es eine Auswahlmenge, 2. jede Menge ist ordnebar, 3. wenn es für jede Menge endlicher, fremder Mengen eine Auswahlmenge gibt, so auch zu jeder abzählbaren Menge fremder Mengen, 4. die Vereinigungsmenge  $A$  fremder Mengen besitzt eine mit  $A$  gleichmächtige Teilmenge, 5. eine Menge, die im Sinne der Tarskischen Definition  $n$  ( $n = \text{II}, \dots, \text{V}$ ; Tarski, *Fundam. Math.* 6, 45ff.) endlich ist, ist auch im Sinne der Definition  $n - 1$  endlich (insbesondere also: eine irreflexive Kardinalzahl ist induktiv). Für die Sätze 1—3 gab bereits Fraenkel (in verschiedenen Arbeiten) Unabhängigkeitsbeweise; die Autoren vermeiden die Problematik des dort zugrunde gelegten Aussonderungsaxioms; sie benutzen ein dem Quineschen (dies. Zbl. 15, 50) ähnliches Aussonderungsaxiom.

*Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

**Tarski, Alfred:** Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen. *Vorl. Mitt. C. R. Soc. Sci. Varsovie* 30, 152—181 (1937).

The author considers families  $K$  of sets containing with any  $m$  sets their sum (resp. intersection): so-called  $m$ -additive (resp.  $m$ -multiplicative) fields of sets. By an  $m$ -additive (resp.  $m$ -multiplicative) function of sets, is meant a set-valued function (whose values need not be in  $K$ ), which carries sums (resp. intersections) of  $m$  or fewer



sets into sums. A number of theorems are stated without proof, and applied to the theory of Boolean algebras and of their representations. For example,  $m$ -additive functions are sometimes necessarily  $n$ -additive for certain  $nm$ . *S. Ulam.*

**Gama, Lelio I.:** Sur l'additivité de l'accumulatif. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 447—448 (1938).

Suite et généralisation de la note précédente du même auteur (ce Zbl. **19**, 140) où se trouvait démontrée l'additivité de l'ensemble limite pour des fonctions abstraites monotones, et comme cas particulier celle du contingent en un point d'accumulation commun d'un nombre fini ou infini d'ensembles. *E. Blanc (Toulon).*

**Piccard, Sophie:** Une propriété de l'ensemble parfait de Cantor. C. R. Soc. Sci. Varsovie **30**, 252—256 (1937).

Let  $E$  be the Cantor ternary set of the interval  $(0, 1)$ ;  $E(h)$ , for  $h$  a real number between 0 and 1, the same set translated the distance  $h$ . Utilizing the ternary representation of the points of  $E$ , the author proves that  $E \cdot E(h)$  is either finite or non-denumerable. *Blumberg (Columbus).*

**Ursell, H. D.:** Remark on a paper by Splawa-Neyman. Fundam. Math. **31**, 84—85 (1938).

Negative answer, by means of an example, to the following problem, suggested by W. Sierpiński: If  $E$  is a linear set of measure 0, and  $\mathfrak{F}$  a family of open intervals such that for every  $x$  of  $E$  and every  $\varepsilon > 0$  there exists an interval of  $\mathfrak{F}$  of length  $< \varepsilon$  containing  $x$ , does there exist for every  $\varepsilon > 0$  a (finite or infinite) sequence of intervals of  $\mathfrak{F}$  covering  $E$  and of length sum  $< \varepsilon$ ? *Blumberg (Columbus).*

**Kunugui, Kinjiro:** Sur la projection d'un ensemble plan  $G\delta$ . Proc. Imp. Acad. Jap. **14**, 90—95 (1938).

Affirmative answer to the following problem of E. Szpilrajn: If  $M$  is a planar  $G_\delta$  always intersected in a closed set by a parallel to the  $y$ -axis, is the projection of  $M$  necessarily a Borel set? Proof of the following theorem: If  $M$  is a planar  $G_\delta$ , then the set of points  $(\xi, 0)$  such that  $x = \xi$  cuts  $M$  in a closed set  $(\neq 0)$  is an analytic complement. *Blumberg (Columbus).*

**Ortoby, J. C., and S. M. Ulam:** On the equivalence of any set of first category to a set of measure zero. Fundam. Math. **31**, 201—206 (1938).

Les auteurs démontrent que tout ensemble de la première catégorie dans l'espace euclidienne à  $n$  dimensions est automorphe avec un ensemble de mesure nulle. Le même théorème subsiste parmi les ensembles jouissant de la propriété de Baire (au sens faible) et les ensembles, mesurables et parmi les ensembles de la première catégorie par rapport à l'espace de Cantor et les ensembles qui y sont de mesure nulle.

*Marcinkiewicz (Paris).*

**Sierpiński, W.:** Sur le rapport entre deux notions de la séparabilité. Bull. Sci. math., II. s. **62**, 227—228 (1938).

Étant donnée une famille d'ensembles  $\Phi$  dans un espace  $E$ , l'auteur dit que les éléments de  $E$  sont séparables au moyen de la famille  $\Phi$ , lorsque pour tout couple d'éléments  $p, q$  de  $E$  il existe deux ensembles disjoints  $U \in \Phi$ ,  $V \in \Phi$  tels que  $p \in U$  et  $q \in V$ . L'auteur démontre le théorème suivant: Pour qu'un espace métrique  $E$  soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une famille dénombrable  $\Phi$  de sphères ouverts de rayons inférieurs à  $\varepsilon$ , telle que les éléments de  $E$  soient séparables au moyen de la famille  $\Phi$ . *Saks (Warszawa).*

**Knichal, V.:** Sur les superpositions des automorphies continues d'un intervalle fermé. Fundam. Math. **31**, 79—83 (1938).

Let  $C$  be the set of continuous, increasing functions  $f(x)$  defined in the closed interval  $I = (0, 1)$  and having the values 0 and 1 at 0 and 1 respectively. The author proves the following theorem, which improves an analogous result of Schreier and Ulam [Fundam. Math. **23**, 102 (1934); this Zbl. **9**, 410]: There exist two functions  $\varphi$  and  $\psi$  of  $C$  such that for every positive  $\varepsilon$  and every function  $f$  of  $C$ , there exist two



positive integers  $n$  and  $m$  such that  $|f(x) - \psi^n \varphi^m(x)| < \varepsilon$  for all  $x$  in  $I$ . The proof is based on the following lemma: There exist two functions  $\varphi$  and  $\psi$  in  $C$  such that if  $0 < a_1 < a_2 \dots < a_r < 1$ ,  $0 < b_1 < b_2 \dots < b_r < 1$  are two finite sequences of rational number with the same number of elements, there exist two positive integers  $m$  and  $n$  such that  $a_i = \psi^n \varphi^m(b_i)$  for  $i = 1, 2, \dots, r$ . Blumberg (Columbus).

**Szpilrajn, Edward:** The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications. *Fundam. Math.* **31**, 207—223 (1938).

A continuation of earlier work of the author (this *Zbl.* **15**, 8; **18**, 394). Properties of the characteristic function of a sequence of sets (c.f.) equivalent to certain properties of the sequence itself are obtained and applied. The emphasis is on the fact that the idea of the c.f. is useful in obtaining propositions in the general theory of sets equivalent to certain propositions in topology, for instance: (1) there exists a more than countable separable Lusin set, and (2) there exists a more than countable linear set concentrated in the sense of Besicovitch (this *Zbl.* **9**, 105). [The truth of these propositions is a consequence of  $2^{\aleph_1} = \aleph_1$ .] Considerations of the c.f. of the base of a separable space lead to new proofs of theorems about the mapping of certain types of such spaces on subsets of the Cantor middle third set. Finally, it is shown that the following propositions (neither of which have yet been proved true or false) are equivalent: (3) there exists a countable system of sets whose borelian extension includes all the analytic subsets of the interval  $I = [0, 1]$ , (4) there exists a  $(1-1)$  transformation of  $I$  into a linear set  $S$  which carries every analytic subset of  $I$  into a borelian subset of  $S$ . Todd (London).

**Kondô, Motokiti:** L'uniformisation des complémentaires analytiques. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **13**, 287—291 (1937).

The article relates to the following problem of W. Sierpiński [*Fundam. Math.* **16** (1930)]: Is a planar set  $C(A)$  always uniformizable by means of a  $CPC(A)$ , or a projective set? Proof, with the aid of reasoning by Lusin and Novikoff, of the following theorem: A planar, analytic complement can be uniformized by means of an analytic complement. Announcement — proof to be published later — of the following results: A projective set of class  $(A_2)$  can be uniformized by means of a set of the same class. A projective set of class  $(A_2)$  is the projection of a uniform analytic complement. A projective set of class  $(A_2)$  is the sum of an  $\Omega$ -sequence ( $\Omega$  = ordinal initiating  $\aleph_1$ ) of sets measurable  $(B)$ . Blumberg (Columbus).

**Inagaki, Takeshi:** Sur les classes des constituantes des ensembles complémentaires analytiques. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **13**, 342—347 (1937).

$C$  is a given planar set. A point set lying on a parallel to the  $y$ -axis is said to have property  $P_\alpha$  if its order in the positive direction of the  $y$ -axis is normal and of type  $\alpha$ .  $Y_\xi$  is the subset of  $C$  on  $x = \xi$ ;  $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha(C)$ , the set of points  $\xi$  such that  $Y_\xi$  has property  $P_\alpha$  — it is called the constituent (Lusin) of order  $\alpha$  of the complement of the set sifted by means of sieve  $C$ . If  $\mathfrak{C}$  is a family of planar sets,  $\Phi(\alpha)$  is the family of all  $\mathcal{C}_\alpha(C)$ , where  $C$  ranges over  $\mathfrak{C}$ . In the present paper, the case is considered where  $\mathfrak{C}$  is the family of all planar sets composed of a denumerable infinity of closed sets lying on parallels to the  $y$ -axis.  $\mathfrak{F}$  is the family of closed sets lying on the  $x$ -axis;  $\mathfrak{F}_\sigma^0 = \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}_\sigma' = (\mathfrak{F}_\delta^0)_\sigma$ ,  $\mathfrak{F}_\delta^2 = (\mathfrak{F}_\sigma')_\delta$ ,  $\mathfrak{F}_\delta^{2\alpha} = \left( \sum_{0 \leq \beta < \alpha} \mathfrak{F}_\sigma^{2\beta+1} \right)_\delta$ ,  $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1} = (\mathfrak{F}_\delta^{2\alpha})_\sigma$ , by induction;  $\mathfrak{G}_\sigma^{2\alpha} \mathfrak{G}_\delta^{2\alpha+1}$ , respective complements in the  $x$ -axis of  $\mathfrak{F}_\delta^{2\alpha}$ ,  $\mathfrak{F}_\sigma^{2\alpha+1}$ . Theorems: 1.  $\mathcal{C}_{\omega^\gamma}$  and  $\mathcal{C}_\alpha$  ( $\omega^\gamma < \alpha < \omega^{\gamma+1}$ ) are respective sets  $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$ ,  $\mathfrak{G}_\sigma^{2(\gamma+1)}$ . 2. The families  $\Phi(\omega^\gamma)$  coincide with the families  $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$ . 3. The families  $\Phi(\alpha)$  are monotone, i.e.,  $\Phi(\alpha) \subseteq \Phi(\beta)$  for  $\alpha < \beta$ . Blumberg (Columbus).

**Kakutani, Shizuo:** On the uniqueness of Haar's measure. *Proc. Imp. Acad. Jap.* **14**, 27—31 (1938).

The author simplifies the proof given by J. von Neumann for the uniqueness of the Haar measure on a locally compact separable group (this *Zbl.* **18**, 298). The



notion of right- $O$ -invariance, as defined by von Neumann, is avoided here through a careful use of the theorem of Fubini. The proof is also extended to include the theorem due to A. Weil that the Haar measure on any locally bicomact topological group is unique.

Garrett Birkhoff (Cambridge, U. S. A.).

**Nikodym, Otton: Sur la mesure vectorielle parfaitement additive dans un corps abstrait de Boole.** Acad. roy. Belg., Cl. Sci., Mem., Coll. in 8° 17, Fasc. 7, 1—40 (1938).

The author considers a vector valued measure defined over a sub-field of a Boolean algebra in which denumerable sums and products are defined. The subfield  $S$  is not assumed to be a  $\sigma$  or Borel field. The measure function  $\mu$  is assumed to be of bounded

variation in the sense that  $\mu^*(a) = \text{l. u. b.} \sum_{i=1}^n |\mu(a_i)|$  is finite, where the l. u. b. is taken over all finite sets  $a_1, \dots, a_n$  of disjoint (i. e.,  $a_i a_j = 0, i \neq j$ ) elements of the subfield which are contained in  $a$ . A necessary and sufficient condition that  $\mu$  have a completely additive extension over the Lebesgue extension (with respect to  $\mu$ ) of the sub-field is that for every set of elements  $a, a_i, i = 1, 2, \dots$  in  $S$  which have the properties  $a \subset \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(a_n) < \infty$  we have  $|\mu(a)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(a_n)$ . *N. Dunford* (New Haven).

**Nikodym, Otton: Sur l'existence d'une mesure parfaitement additive et non séparable.** Acad. roy. Belg., Cl. Sci., Mem., Coll. in 8° 17, Fasc. 8, 1—29 (1938).

The purpose of this paper is to define a completely additive real valued measure function  $\mu$  over a  $\sigma$ -field  $K$  of subsets of  $(0, 1)$  in such a way that the space  $K$  under the metric  $(a, b) = \mu(a - b) + \mu(b - a)$  is not separable. *N. Dunford*.

**Marcinkiewicz, Józef: Quelques théorèmes sur les séries et les fonctions.** Bull. Sémin. math. Univ. Wilno Nr 1, 19—24 (1938).

L'auteur démontre les théorèmes suivants: 1. Il existe une fonction continue non-croissante dans aucun intervalle et admettant partout une dérivée symétrique supérieure

positive. 2. Il existe une fonction continue telle que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\varepsilon}^1 [f(x+t) - f(x)] \frac{dt}{t} \right| < \infty$ , presque partout et la limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 [f(x+t) - f(x)] \frac{dt}{t}$  existe au plus dans un ensemble

de mesure nulle. 3. Soient  $x_i$  les zéros du polynôme de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ; pour chaque couple  $\alpha, \beta > -1$  il existe une fonction  $f(x)$  continue, telle que la suite de polynômes  $L_n(x)$  du degré  $n - 1$  satisfaisant à la condition  $L_n(x_i) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ , diverge pour chaque  $x, -1 < x < 1$ .

*N. Obrechhoff* (Sofia).

**Nikodym, Otton: Sur un théorème concernant les fonctions au carré sommable.** Ann. Soc. Polon. math. 17, 91—96 (1938).

The note contains the proof of the theorem: If  $f(x)$  is measurable in  $[0, 1]$  and  $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty$ , then  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|^2 dt = 0$  for almost all  $x$  of  $[0, 1]$ . *Saks* (Warszawa).

**Popoviciu, Tiberiu: Sur quelques inégalités entre les fonctions convexes. I.** C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 449—454 (1938).

**Popoviciu, Tiberiu: Sur quelques inégalités entre les fonctions convexes. II.** C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 454—458 (1938).

Es sei  $\varphi(x), 0 \leq x \leq 1$ , eine stetige, monoton wachsende, konvexe Funktion mit  $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ . Ferner bezeichne  $(E_a^b)_n$  die Klasse der für  $0 \leq x \leq 1$  definierten stetigen Funktionen  $f(x)$  mit  $f(0) = a \geq 0$  und  $f(1) = b \leq 1, a < b$ , die nichtkonkav von allen Ordnungen  $0, 1, \dots, n$  sind. (Über diesen Begriff vgl. z. B. Verf., dies. Zbl. 7, 249 u. 9, 59.) Die Aufgabe, die in den beiden Noten gelöst wird, ist folgende:

$\varphi(x), n, a, b$  seien gegeben; es ist das Maximum von  $A_\varphi = \int_0^1 \varphi(f) dx$  zu bestimmen,



wenn  $f$  alle Funktionen der Klasse  $(E_a^b)_n$  durchläuft, für die  $A = \int_0^1 f dx$  einen gegebenen Wert besitzt. Es ergibt sich, daß das Maximum nur für solche Funktionen der Klasse  $(E_a^b)_n$  erreicht wird, deren  $(n-1)$ -te Ableitungen stückweise linear sind und höchstens eine Ecke haben. Das Maximum selbst und diese Extremalfunktionen lassen sich explizit angeben. Für  $n=1$  ergeben sich teilweise bekannte Resultate. *Fenchel*.

## Analysis.

### Allgemeines:

● **Severi, Francesco:** *Lezioni di analisi. Vol. 1. Determinanti, equazioni lineari, limiti derivate e differenziali, funzioni ed equazioni algebriche.* 2. edit. Bologna: Nicola Zanichelli 1938. VIII, 434 pag. L. 75.—

Das Werk enthält neben den allgemeinverbindlichen Gegenständen eines Einführungslehrgangs in die höhere Analysis eine verhältnismäßig weit führende Darstellung derjenigen Grundgesetze der Algebra, welche dem Lernenden für eine spätere Vertiefung in die algebraische Geometrie unentbehrlich sind — es entspricht damit der vom Verf. und überhaupt in Italien viel gepflegten Forschungsrichtung. Die Integralrechnung ist im wesentlichen auf Band II vertagt. Inhalt: Kombinationslehre, Determinanten und lineare Gleichungen, Reelle Zahlen, Komplexe Zahlen, Funktion und Grenzwert, Ableitungen und Differentiale von Funktionen einer Veränderlichen, Zahlen- und Taylorreihen, Grundbegriffe über Integrale; Algebraische Funktionen, Teilbarkeit von Polynomen von einer und mehreren Veränderlichen, Resultanten, Bézoutsches Theorem; Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades, und Numerische Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen beliebigen Grades. Zu jedem Kapitel finden sich Skizzen zu tiefer liegenden Aussagen, historische Bemerkungen und zahlreiche Übungsaufgaben, zum Teil mit wenig bekannten interessanten Einzelheiten. — Die 2. Auflage ist nur in wenigen Punkten verändert bzw. verbessert. *Ullrich*.

**Lall, P. Samuels:** *Certain modifications of Dedekind's theorem of continuity.* Proc. Nat. Acad. Sci., Allahabad 8, 71—75 (1938).

Bei Mahajani, *Lessons in elementary analysis* (1934), ist die bekannte Klasseneinteilung Dedekinds für die rationalen Zahlen (Dedekindscher Schnitt) in einer von der üblichen abweichenden Weise behandelt worden; an dieser übt Verf. berechnete Kritik. *Kamke* (Tübingen).

**Maci, Giovanni:** *Sul teorema del valor medio.* Period. Mat., IV. s. 18, 177—185 (1938).

Nach einer Zusammenstellung der üblichen Beweise des gewöhnlichen und verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differential- und Integralrechnung berichtet Verf. kurz über die Ergebnisse von Pompeiu bezüglich des engsten Intervalles, in dem der Mittelwert eines quadratischen Polynoms über dem Intervall  $a \dots b$  sicher angenommen wird, und bezüglich der nichtkonstanten Lösungen der Funktionalgleichung

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx;$$

letztere bestehen nur aus den drei Funktionspaaren  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$ ;  $e^x$ ,  $e^{-\frac{x}{2}}$  und  $\tan x$ ,  $\cos x$ .

*Harald Geppert* (Gießen).

**Takeya, Sôichi, and Kinjiro Kunugi:** *A relation between the length of a plane curve and angles stretched by it.* Proc. Imp. Acad. Jap. 13, 296—300 (1937).

Soit une courbe de Jordan simple et rectifiable. Un ensemble de points de cette courbe en constitue un „arc généralisé“ pour lequel on peut définir une longueur. Cet arc généralisé a pour support un arc véritable de la courbe. Les auteurs donnent une limitation supérieure de la longueur d'un tel arc généralisé sous les hypothèses



suivantes: 1° l'arc est tout entier dans un cercle de rayon  $S$ . 2° A tout point  $p$  de cet arc correspond un angle de sommet  $p$ , de grandeur fixe  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ), toujours situé du même côté de la courbe, et ne contenant à son intérieur aucun point du support de l'arc. — La longueur de l'arc généralisé est alors inférieure à

$$\frac{2S}{\sin \frac{\theta}{4}} \times \left[ \text{partie entière} \left( \frac{4\pi}{\theta} \right) + 1 \right].$$

Ceci conduit à une limitation de la longueur d'une courbe rectifiable simple de Jordan contenue dans un cercle de rayon  $S$  et satisfaisant à la condition géométrique énoncée dans un autre compte-rendu (voir ce Zbl. 19, 272), la condition de variation continue du secteur n'étant pas requise.

E. Blanc (Toulon).

**Cibrario, Maria:** Sull'esistenza di un integrale doppio. Boll. Un. Mat. Ital. 17, 187—190 (1938).

Die Funktion  $z(x, y)$  sei eine Lösung der Gleichung

$$(az_x + bz_y)_x + (bz_x + cz_y)_y - fz = 0$$

im Gebiete  $D$ ; die quadratische Form

$$M(z) = az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 + fz^2$$

sei positiv-halbdefinit. Verf. beweist, daß, wenn für irgendeine dieselben Randwerte von  $z$  annehmende, totalstetige Funktion  $u(x, y)$  mit quadratsummierbaren Ableitungen das Integral  $I(u) = \iint_D M(u) dx dy$  einen endlichen Wert hat, dann fällt auch  $I(z)$

endlich aus und  $I(z) \leq I(u)$ .

G. Cimmino (Napoli).

**Watson, G. N.:** Two infinite integrals. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 5, 174—181 (1938).

Verf. leitet für die Funktionen (vgl. dies. Zbl. 18, 60)

$$F(\lambda, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\lambda \cosh t} \frac{\sin \theta}{\cosh t + \cos \theta} dt, \quad G(\lambda, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{i\lambda \cosh t} \frac{\cos \frac{1}{2}\theta \cosh \frac{1}{2}t}{\cosh t + \cos \theta} dt$$

Entwicklungen ab, die für numerische Berechnungen geeignet sind. Die gefundenen Ergebnisse sind etwas kompliziert. Für  $\lambda$  positiv und  $-\pi < \theta < \pi$  gilt z. B.

$$F(\lambda, \theta) = \frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}\theta \sum_{n=0}^\infty f_n(\lambda) \sin^{2n+1} \frac{1}{2}\theta.$$

Hierin ist

$$f_n(\lambda) = \frac{2e^{-i\lambda}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)! (2i\lambda)^m}{m! \Gamma(n-m+\frac{1}{2})} + \frac{2e^{-i\lambda}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=n+1}^\infty \frac{\Gamma(m-n-\frac{1}{2}) (2i\lambda)^m}{m! (m-n-1)!} \{ 2\psi(m-n) - 2\psi(2m-2n) + \psi(m+1) + \frac{1}{2}\pi i - \log \frac{1}{2}\lambda \}$$

$[\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)]$ ; die Funktionen  $f_n(\lambda)$  können auch mit Hilfe einer rekurrenten Beziehung berechnet werden. Das Verhalten von  $F(\lambda, \theta)$  für  $\theta \rightarrow \pm\pi$  wird untersucht. — Analog für  $G(\lambda, \theta)$ .

C. S. Meijer (Groningen).

**Pompeiu, D.:** Sources d'identités. Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 273—275 (1938).

### Reihen:

**Salem, Raphaël:** Sur un test général pour la convergence uniforme des séries de Fourier. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 662—665 (1938).

La note contient une démonstration élégante du critère bien connu de Jordan pour la convergence des séries de Fourier, ainsi que la démonstration de la proposition suivante: Si la fonction continue et périodique  $f(x)$  est à  $\Phi$ -variation bornée, où



$\Phi(u) = \exp u^{-\alpha}$ ,  $\alpha < 1$ , alors la série de Fourier de  $f(x)$  converge uniformément. Pour  $\alpha < \frac{1}{2}$  ce résultat a été déjà obtenu par M. L. C. Young (voir ce Zbl. 16, 105). [La fonction  $f(x)$  est à  $\Phi$ -variation bornée dans l'intervalle  $(0, 2\pi)$ , si la somme  $\sum_{i=1}^n \Phi(|f(x_i) - f(x_{i-1})|)$  est bornée pour toute subdivision  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 2\pi$  de  $(0, 2\pi)$ .]

A. Zygmund (Wilno).

Sidon, S.: *Bestimmung der Sprungstellen einer Funktion aus ihrer Fourier-Reihe*. J. London Math. Soc. 13, 183—185 (1938).

There is a number of theorems which permit to obtain the jump  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  of an arbitrary function  $f(x)$  of bounded variation, at a given point  $x_0$ , by means of the Fourier series of the function  $f(x)$  [see e.g. Fejér, J. f. Math. 142, 165—188 (1913)]. In the present paper the author confines his attention to the case when the function  $f(x)$  of bounded variation has a finite number of points of discontinuity, and gives a procedure by means of which it is possible to obtain these points of discontinuity as the roots of an algebraic polynomial. The coefficients of this polynomial are obtained by certain limiting processes from the Fourier coefficients of the function  $f(x)$ .

A. Zygmund (Wilno).

Zygmund, Antoni: *A remark on conjugate series*. Bull. Sémin. math. Univ. Wilno Nr 1, 16—18 (1938).

Le théorème suivant est démontré: Soit  $\sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  la série de Fourier-Stieltjes correspondante à la fonction  $\Phi(x)$ ;  $a_n - ib_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} d\Phi(x)$ , où  $\Phi(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$ .—Alors la série conjuguée  $\sum_1^\infty (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$  est une série de Fourier dans le sens *DS*. Plus précis,

$$-b_n = \frac{1}{\pi} (DS) \int_0^{2\pi} \cos nx d\bar{\Phi}(x), \quad a_n = \frac{1}{\pi} (DS) \int_0^{2\pi} \sin nx d\bar{\Phi}(x),$$

où  $\bar{\Phi}(x) = -\sum_1^\infty \frac{1}{n} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ . *DS* désigne l'intégration dans le sens de Denjoy-Stieltjes.

N. Obrechhoff (Sofia).

Cesari, Lamberto: *Proprietà delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche*. Rend. Circ. mat. Palermo 61, 269—295 (1937).

L'auteur donne des généralisations des théorèmes de Young, Szidon, Kolmogoroff, Moore et de lui même pour les fonctions représentées par les séries trigono-

métriques (1)  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ . Il considère d'abord les suites finies

de quatre types: 1.  $\varepsilon_i = \varepsilon_{2p-i}$ , 2.  $\varepsilon_i = -\varepsilon_{2p-i}$ , 3.  $\varepsilon_i = \varepsilon_{2p+1-i}$ , 4.  $\varepsilon_i = -\varepsilon_{2p+1-i}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, p$ , et il les désigne par  $[\varepsilon_n^{(u)}]$ ,  $u = 1, 2, 3, 4$ ,  $p$  étant l'ordre. Les polynomes

$$g_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^p \alpha_n \cos nx, \quad g_2(x) = \sum_{n=1}^p \beta_n \sin nx,$$

$$g_3(x) = \sum_{n=0}^p \alpha'_n \cos \frac{2n+1}{2} x, \quad g_4(x) = \sum_{n=0}^p \beta'_n \sin \frac{2n+1}{2} x,$$

et les suites  $[\varepsilon_n^{(u)}]$ ,  $u = 1, 2, 3, 4$ , correspondantes sont aussi introduits. Il démontre différents théorèmes parmi lesquels nous citerons: Soient  $[\eta_n^{(u)}]$ ,  $[\eta_n^{(v)}]$  deux suites du type  $u$  et  $v$  du même ordre  $\mu$  avec  $u = 1, v = 2$ , ou  $u = 3, v = 4$ , telles que le polynome relatif  $G(x) = g_u(x) + g_v(x)$  a seulement des zéros simples. Supposons que



pour  $a_n$  et  $b_n$  de la série (1) on a (2)  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |D_{\eta(u)} a_n + D_{\eta(v)} b_n| \log n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |D_{\eta(u)} b_n - D_{\eta(v)} a_n| \log n < \infty; \quad D_e a_n = \sum_{i \leq 0} a_{n+i} \varepsilon_i. \quad (3)$$

Alors la série (1) est la série de Fourier d'une fonction intégrable  $L$ . La conclusion reste la même si  $G(x)$  a des zéros simples ou doubles et au lieu de (3) on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |D_{\eta(u)} a_n + D_{\eta(v)} b_n| n \log n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |D_{\eta(u)} b_n - D_{\eta(v)} a_n| n \log n < \infty.$$

Obrechhoff (Sofia).

Iyengar, K. S. K.: On linear transformations of bounded sequences. I. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 7, 399—410 (1938).

Iyengar, K. S. K.: On linear transformations of bounded sequences. II. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 8, 20—38 (1938).

Iyengar, K. S. K.: On linear transformations of bounded sequences. III. Proc. Indian Acad. Sci. A 8, 135—144 (1938).

Verf. betrachtet die Klasse der linearen Transformationen  $(T)$ , deren Matrizen  $\|a_{m,n}\|$  durch die Bedingungen

$$a_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{für } n < m, \\ 1 & \text{,, } n = m, \\ \leq 0 & \text{,, } n > m, \end{cases} \quad \text{und} \quad -\sum_{p=1}^{\infty} a_{n,n+p} \leq 1,$$

charakterisiert sind, und untersucht, wann die durch die reziproken Matrizen  $(T^{-1})$  oder durch verschiedene Kompositionen der direkten und reziproken  $T$ -Matrizen gegebenen Transformationen auf beschränkte oder Nullfolgen sukzessiv angewendet berechtigt bleiben. — Als spezielle kommutative  $T$ -Transformationen werden die  $U$ -Transformationen betrachtet, bei denen  $a_{n,n+p} = \alpha_p$  ist. Da sich die Differenzen beliebiger (nicht ganzzahliger) Ordnung durch die  $U$ - bzw.  $U^{-1}$ -Transformationen oder durch deren Kompositionen darstellen lassen, so können aus diesen allgemeinen Betrachtungen die meisten Sätze von A. F. Anderson (Studier over Cesàro's summabilitet's metode, Kopenhagen 1921) und K. Knopp [Mehrfachmonotone Zahlen; Math. Z. 22, 75—85 (1925)] über Differenzen beliebiger Ordnung abgeleitet werden. Karamata.

Hyslop, J. M.: On the approach of a series to its Cesàro limit. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 5, 182—201 (1938).

Le sujet de cet article est l'étude des séries sommables  $(C, p)$  —  $p$  entier — et dont les moyennes  $s_n^{(p)}$  vérifient l'une ou l'autre des deux conditions suivantes:

$$s_n^{(p)} - s = \lambda \cdot n^{-\varrho} + o(n^{-\varrho}), \quad (A)$$

$$s_n^{(p)} - s = O(n^{-\varrho}), \quad \text{où } 0 < \varrho \leq p = E(p). \quad (B)$$

Les propriétés de telles séries sont énoncées et démontrées dans seize théorèmes. En voici quelques unes. Une série vérifiant (A) [ou (B)] est sommable (bornée)  $(C, p - \varrho)$ . Si  $\varrho = 1$  et  $\sum a_n$  vérifie (A) [ou (B)], alors  $\sum n a_n$  est sommable  $(C, p)$  avec la somme  $-p \cdot \lambda$  [ou bornée  $(C, p)$ ]. Si  $0 < \varrho < 1$  et  $\sum a_n$  vérifie (A) avec  $\lambda = 0$  [ou (B)], alors  $\sum n^{\varrho} \cdot a_n$  est ou bien sommable (bornée)  $(C, p)$  ou bien non sommable (non bornée)  $(C, \delta)$  quelque soit  $\delta$ . Si (A) est vérifiée avec  $\lambda \neq 0$  alors  $\sum n^{\varrho} \cdot a_n$  n'est pas sommable  $(C)$ .

Une série  $\sum a_n$  vérifiant (A) avec  $0 < \varrho \leq 1$  est convergente si en outre  $a_n = o\left(n^{\frac{\varrho}{p}-1}\right)$ .

De même pour (B), si  $a_n = o\left(n^{\frac{\varrho}{p}-1}\right)$ .

E. Kogbetliantz (Paris).

Birindelli, Carlo: Contributo all'analisi dei metodi di sommazione di Gronwall. Rend. Circ. mat. Palermo 61, 157—176 (1937).

Soit  $z = f(\omega)$  une fonction holomorphe dans  $|\omega| \leq 1$  sauf en  $\omega = 1$  et représentant  $|\omega| < 1$  dans un domaine  $D \subset (|z| < 1)$ ;  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .  $\omega = \varphi(z)$  est holom. dans  $D$  sauf en  $z = 1$ , et autour de  $z = 1$ , on a:  $1 - \omega = (1 - z)^{\lambda} \cdot \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - z)^n\right)$ ,



$\lambda \geq 1, a > 0$ . Soit  $g(\omega) = \sum b_n \omega^n, b_n \neq 0$ , holom. dans  $|\omega| < 1$ , singulière seulement en  $\omega = 1$ , telle que  $g(\omega) = (1 - \omega)^{-\alpha} + \gamma(\omega), \alpha > 0, \gamma(\omega)$  régul. en  $|\omega| \leq 1, g(\omega) \neq 0$

pour  $|\omega| < 1$ .  $\sum u_n$  est sommable  $(f, g)$  si les  $U_i$ , vérifiant  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{g(\omega)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n \omega^n$ ,

tendent vers  $S$ . L'A. étudie le champ de sommabilité  $(f, g)$  de  $\sum \xi^n$ . Ceci fournit une méthode de prolongement analytique. Il exprime une sommabilité  $(f, g)$  par l'intermédiaire d'autres procédés de sommabilité, plus simples, ce qui lui fournit encore des résultats sur le prolongement analytique. Mandelbrojt (Paris).

**Vignaux, J. C.:** Über die Summationsmethode von Sannia-Knopp. Contrib. estud. ci. fis. mat. 1, 337—370 (1937) [Spanisch].

**Vignaux, J. C.:** Über die asymptotischen zweifachen Reihen. An. Soc. Ci. Argent. 125, 407—418 (1938) [Spanisch].

$\sum \frac{a_{ij}}{x^i y^j}$  représente asymptotiquement  $f(x, y)$  si de

$$E_{mn}(x, y) = x^m y^n \left[ f(x, y) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{a_{ij}}{x^i y^j} \right]$$

résulte:  $\lim E_{mn}(x, y) = 0, (x, y) \rightarrow 0$  pour tout couple  $(m, n)$ . L'A. démontre l'unicité d'un tel dev. Il étudie les séries asymptotiques pour la somme, produit et quotient de deux fonctions; ainsi que pour l'intégrale et les dérivées d'une fonction.

Mandelbrojt (Paris).

### Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

**Heilbronn, H.:** On Dirichlet series which satisfy a certain functional equation. Quart. J. Math., Oxford Ser. 9, 194—195 (1938).

It is proved that, if (I)  $\varphi(s)$  has a convergent Dirichlet expansion  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  in some half-plane, (II)  $\varphi(s)$  is regular for all finite  $s$  apart from a finite number of poles, (III)  $\Phi(s) = A^{-s} \Gamma^k(s/\lambda) \varphi(s)$  satisfies  $\Phi(s) = \Phi(1-s)$  for some positive  $A, k, \lambda$  ( $k$  integral), (IV)  $\varphi(s) = O(|t|^P)$  uniformly for  $\sigma \geq \frac{1}{2}, |t| \rightarrow \infty$  ( $s = \sigma + it, P$  a constant), then

$$\Phi(s) = \Phi_0(s) + \int \dots \int_{N(x) \geq 1} \{N(x)^{s/\lambda} + N(x)^{(1-s)/\lambda}\} f_{\mu} \{A^{\mu} S(x)\} \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_k}{x_k}, \quad (1)$$

where  $\Phi_0(s)$  is the rational function which vanishes at infinity and makes  $\Phi(s) - \Phi_0(s)$  an integral function,  $N(x) = x_1 \dots x_k, S(x) = x_1 + \dots + x_k$  ( $x_1, \dots, x_k > 0$ ),

$\mu = \lambda/k$ , and  $f_{\mu}(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^{\mu}} \gamma$  ( $\gamma > 0$ ). The proof of (1) consists in verifying that the

difference  $G(s)$  between the two sides is an integral function which is bounded in any fixed strip  $\alpha \leq \sigma \leq \beta$ , satisfies  $G(s) = G(1-s)$ , and tends to zero uniformly in  $t$  when  $\sigma \rightarrow +\infty$ . The essential novelty lies in basing the proof of a formula of the type (1) directly on the functional equation for  $\varphi(s)$  and not on a functional equation for  $f_{\mu}(\gamma)$ . The author points out that (1) includes as a special case the identity from which Siegel derived his theorem  $\log L_d(1) = o(\log |d|)$  (see this Zbl. 11, 9). The proof of this important result is thus greatly simplified. Ingham (Cambridge).

**Lewitan, B.:** Über die Mittelwerte der meßbaren Funktionen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 19, 447—450 (1938).

Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung (eine verallgemeinerte Fast-periodizität) dafür angegeben, daß für eine Funktion  $f(x)$  mit (\*)  $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx < \infty$  der Mittelwert (\*\*)  $a(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-i\lambda x} dx$  für jedes  $\lambda$  vorhanden ist. Für eine



beliebige Funktion  $f(x)$  mit (\*) kann man  $a(\lambda)$  durch (\*\*) definieren, indem man für  $\lim$  einen Banachschen Limes setzt. Dann ist  $a(\lambda) \neq 0$  für höchstens abzählbar viele  $\lambda$ , und es wird behauptet, daß  $f(x)$  durch die Fourierreihe  $f(x) \sim \sum_k a(\lambda) e^{i\lambda x}$  eindeutig bestimmt ist. (Vgl. dies. Zbl. 18, 58.)

B. Jessen (Kopenhagen).

### Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Banerji, A. C., and P. L. Bhatnagar: The solution of certain types of differential equations. Proc. Nat. Acad. Sci., Allahabad 8, 85—91 (1938).

Mit Hilfe der Laplacetransformation werden die beiden folgenden Differentialgleichungen gelöst:

$$y'' = (a^2 x^{2n} - 1)y,$$

$$y'' = (4a^2 b^2 x^2 e^{2bx^2} - 1)y.$$

Die Lösungen der ersten Gleichung sind für  $anx^{n-1} > 1$

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} + C_2 \int_1^{\infty} e^{\lambda t} (t-1)^{\mu} (t+1)^{\nu} dt$$

mit

$$\lambda = -\frac{a}{n+1} x^{n+1}, \quad \mu = -\frac{n+2}{2n+2} - \frac{x^{1-n}}{2a(n+1)},$$

$$\nu = -\frac{n+2}{2n+2} + \frac{x^{1-n}}{2a(n+1)}.$$

Die Lösungen der zweiten Gleichung erhält man aus

$$y = \int e^{-\xi t} (t-1)^{\eta-\zeta} (t+1)^{\eta+\zeta} dt,$$

wo

$$\xi = ae^{bx^2}, \quad \eta = \frac{1-2bx^2}{4bx^2}, \quad \zeta = \frac{e^{-bx^2}}{8ab^2x^2}$$

ist und die Integrationsgrenzen so zu wählen sind, daß an diesen der mit  $(t^2 - 1)$  multiplizierte Integrand verschwindet. Näheres in der Arbeit der Verff. Kamke.

Ielchin, M.: Sur le problème d'oscillation pour l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 141—145 (1938).

Verf. geht davon aus, daß die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + f(x)y' + g(x)y = 0 \quad (1)$$

die Funktionen

$$y = \frac{C_1}{\sqrt{\omega}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\xi}^x f(x) dx\right) \cdot \cos\left(\int_{\xi}^x \omega(x) dx + C_2\right)$$

( $C_1, C_2, \xi$  beliebig) sind, wenn die „Frequenz“  $\omega(x)$  eine Lösung der mit der Schwarzschen Abgeleiteten von (1) zusammenhängenden Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2} \frac{\omega''}{\omega} + \frac{3}{4} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - \omega^2 = J(x)$$

und

$$J(x) = \frac{1}{2} f' + \frac{1}{4} f^2 - g$$

die Invariante von (1) ist. Hängt  $J = J(x, \alpha)$  noch von einem Parameter  $\alpha$  ab, so ist  $\omega = \omega(x, \alpha)$  bei festen Anfangswerten von  $\omega$  und  $\omega'$  an der festen Stelle  $\xi$  eine Funktion von  $x$  und  $\alpha$  und die partielle Ableitung  $\omega_{\alpha}$  von  $\omega$   $\alpha$  ist

$$\omega_{\alpha} = -\omega(x, \alpha) \int_{\xi}^x \frac{J_{\alpha}(s, \alpha)}{\omega(s, \alpha)} \sin 2 \int_{\alpha}^x \omega(t, \alpha) dt ds.$$

Ist bei gegebenen Funktionen  $J(t), \bar{J}(t)$  speziell

$$J(t, \alpha) = J(t) + \alpha[\bar{J}(t) - J(t)],$$

so ergibt sich

$$\int_{\xi}^x \omega(u) du - \int_{\xi}^x \bar{\omega}(u) du = \int_0^1 d\alpha \int_{\xi}^x \frac{\bar{J}(s) - J(s)}{\omega(s, \alpha)} \sin^2 \int_{\alpha}^x \omega(t, \alpha) dt ds.$$



Hieraus folgt, daß für die „Phasen“ (bei  $\omega(s, \alpha) > 0$ )

$$\int_{\xi}^x \omega(u) du > \int_{\xi}^x \bar{\omega}(u) du$$

gilt, wenn  $\bar{J}(x) > J(s)$  ist. — Ist speziell

$$\bar{J}(x) = \varphi(x) + \left( \int \varphi dx \right)^2 - k^2 e^{-4 \int \varphi dx^2}, \quad (k > 0),$$

so wird hieraus gefolgert, daß die Lösungen der zu  $\bar{J}$  gehörigen Differentialgleichung (1) oszillatorisch sind, wenn

$$\int_{\xi}^{\infty} e^{-2 \int \varphi dx^2} dx = \infty$$

ist. — Ob diese Methode wirklich weiter trägt als die bisher verwendete, geht aus der Arbeit nicht hervor. *Kamke* (Tübingen).

**Horn, J.:** Unbestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungen mit mehrfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung. *Math. Z.* 44, 481—506 (1938).

Um zu den Lösungen des Systems linearer Differentialgleichungen ( $\alpha, \beta = 1, \dots, m$ )

$$x^{1-k} \cdot \frac{dy_{\alpha}}{dx} + \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \cdot y_{\beta} = 0, \quad P_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^{\lambda}}$$

zu gelangen, die mehrfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Unbestimmtheitsstelle  $x = \infty$

$$\Delta(s) = |a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \cdot \delta_{\alpha\beta}|, \quad \delta_{\alpha\alpha} = 1, \quad \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \geq \beta)$$

entsprechen, wird das System gleichzeitig in der unabhängigen und den abhängigen Variablen geeignet transformiert. Verf. erhält damit Systeme, in denen einer der zur mehrfachen Wurzel gehörigen Elementarteiler höheren Grades durch lauter lineare ersetzt ist. Dieses Prinzip wird für alle nichtlinearen Elementarteiler derselben mehrfachen Wurzel durchgeführt mit dem Ziel, die zugehörigen formalen Reihen zu gewinnen. Für die einfachen Wurzeln von  $\Delta(s)$  wird auf *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 24 (1915) verwiesen; sie lassen sich nach der dort gegebenen Methode für lauter einfache Wurzeln behandeln. Gegen Schluß werden für spezielle Systeme (im wesentlichen durch die Bedingung eingeschränkt: auch  $|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \cdot \delta_{\alpha\beta}|$  [ $\alpha, \beta = 1, \dots, \mu$ ;  $\mu$  = Grad der mehrfachen Wurzel] besitze nur lineare Elementarteiler) die formalen i. a. divergenten Reihen aufgestellt. — Diese Untersuchungen sollen die Grundlage für die Behandlung der weiteren Aufgabe bilden, die formalen Reihen durch Laplaceintegrale — als wirkliche Lösungen — zu ersetzen. *Möller* (Gießen).

**Marchaud, André:** Sur les champs de demi-cônes convexes. *Bull. Sci. math.*, II. s. 62, 229—240 (1938).

Verschiedene Arbeiten des Verf. [vgl. insbesondere *Compositio math.* 3 (1936); *C. R. Acad. Sci.*, Paris 199 (1934), dies. Zbl. 10, 258, und *Bull. Soc. Math. France* 62 (1934), dies. Zbl. 9, 255] stehen in enger Berührung mit Untersuchungen von Zaremba, worauf auch in dies. Zbl. 14, 157 hingewiesen wurde. Verf. polemisiert nun scharf gegen einige Behauptungen von Zaremba, daß gewisse Ergebnisse von Marchaud ganz in den seinigen enthalten seien, und untersucht genauer die Reichweite der einzelnen gemachten Voraussetzungen. *W. Feller* (Stockholm).

**Cibrario, Maria:** Il principio di minimo e le equazioni di tipo misto ellittico-parabolico. *Rend. Circ. mat. Palermo* 61, 122—138 (1937).

Es handelt sich um das Minimumproblem

$$I(u) = \int_D \{k^2 y^{2k-2} u_x^2 + u_y^2\} dx dy = \text{Min}$$

mit vorgegebenen Randwerten für  $u$ . Unter Heranziehung der Beweisverfahren von B. Levi und G. Fubini [*Rend. Circ. mat. Palermo* 22 (1906); 23 (1907)] wird die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung  $u(x, y)$  geschlossen und die Möglichkeit,

eine gegen  $u(x, y)$  konvergierende Folge aus einer Minimalfolge abzusondern, festgestellt. Die Funktion  $u(x, y)$  stimmt bis auf eine Randpunktmenge von linearem Maß Null mit einer die vorgeschriebenen Randwerte annehmenden Lösung der Lagrangeschen Gleichung überein. *G. Cimmino (Napoli).*

● **Hachtroudi, Moshen: Les espaces d'éléments à connexion projective normale. (Actualit. scientes et industr. Nr. 565.) Paris: Hermann & Cie. 1937. 83 pag. Frs. 20.—**

Soit  $x, y, z, p, q$  un élément plan et considérons l'espace de ces éléments qui est alors à cinq dimensions. Considérons un système d'équations de Pfaff complètement intégrable ( $S$ ):  $dz - p dx - q dy = dp - \varphi dx - f dy = dq - f dx - \psi dy = 0$ , les  $\varphi, f, \psi$  étant des fonctions déterminées des  $x, y, z, p, q$ . Il s'agit d'imposer à l'espace une connexion projective telle que le système  $S$  définisse les plans de l'espace. Tel est le problème primitif étudié dans ce travail et on voit qu'il représente une généralisation d'un problème traité par M. E. Cartan en 1924 (Bull. Soc. Math. France). En faisant correspondre à chaque élément de l'espace un repère formé par quatre points  $A, A_1, A_2, A_3$ , les composantes  $\omega_j^i$  ( $i, j = 0, 1, 2, 3$ ) du déplacement infinitésimal de ce repère, qui sont alors des formes de Pfaff en  $dx, dy, dz, dp, dq$ , définissent dans l'espace une connexion projective et on peut s'arranger que  $\omega_0^3 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$  soient les équations de plans. On en déduit facilement l'existence d'une infinité de connexions projectives vérifiant les conditions du problème. Parmi ces connexions l'au. détermine une connexion privilégiée, appelée normale, qui est intrinsèquement liée au système  $S$  et la caractérise géométriquement; les coefficients des formes  $\omega_j^i$  sont alors formés des fonctions  $\varphi, f, \psi$  et de leurs dérivées successives d'ordre  $\leq 4$ . Pour certaines fonctions  $\varphi, f, \psi$ , dont la forme générale est indiquée, l'espace d'éléments plans à connexion projective normale se réduit à un espace ponctuel qui est alors équivalent à l'espace projectif ordinaire. — Les autres problèmes étudiés dans ce Mémoire concernent le cas où l'on considère au lieu des paramètres non-homogènes  $p, q$  des paramètres homogènes et le cas général où l'on a l'espace d'éléments plans à  $n$  dimensions et un système de  $n$  équations de Pfaff à  $2n - 1$  variables complètement intégrable ou non. Finalement l'au. étudie les surfaces et les courbes de l'espace d'éléments plans à trois dimensions en appliquant la méthode du repère mobile.

*O. Borùvka (Brno).*

### **Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:**

**Pipes, Louis A.: Operational solution of the wave equation. Philos. Mag., VII. s. 26, 333—340 (1938).**

Mit Hilfe der Laplaceschen Transformation wird zunächst die allgemeine inhomogene Wellengleichung in 4 Veränderlichen (Raum und Zeit) auf die 3 Raumveränderlichen beschränkt und diese als Helmholtzsche Gleichung bekannte Form dann mit dem Greenschen Ansatz gelöst. Es wird nachgewiesen, daß diese Lösung die gestellten Randbedingungen erfüllt und mit Hilfe der Umkehrung der Laplaceschen Transformation explizite erhalten werden kann. *Ernst Weber (New York).*

**Täcklind, Sven: Sur les solutions de l'équation de la chaleur, régulières dans tout le demi-plan au-dessous d'une caractéristique. Ark. Mat. Astron. Fys. 26 A, Nr 12, 1—7 (1938).**

Die Lösung  $z(x, y)$  der Wärmeleitungsgleichung  $z_{xx} - z_y = 0$  sei für  $y < 0$  und alle  $x$  dem Betrage nach kleiner als die  $e$ -Funktion mit dem Exponenten  $|y| \cdot M(y)$ . Verf. beweist, daß  $\lim_{y \rightarrow -\infty} M(y) = 0$  die notwendige und hinreichende Bedingung dafür

ist, daß  $z$  eine Konstante ist. Ferner gibt Verf. eine Bedingung dafür an, daß eine unterhalb der Charakteristik  $y = 0$  reguläre Lösung der obigen Gleichung unabhängig von  $y$  und linear in  $x$  ist. *E. Rothe (Oskaloysa).*

**Neronoff, N.: Sur la réduction d'un problème plan d'hydrodynamique à la résolution d'un système d'équations fonctionnelles. Appl. Math. a. Mech., N. s. 1, 377—393 u. franz. Zusammenfassung 393—394 (1938) [Russisch].**

Das ebene Problem der Umströmung einer geschlossenen Kontur in einer idealen



Flüssigkeit wird auf die Lösung eines recht umständlichen Systems von Integro-differentialgleichungen zurückgeführt. Nur in dem besonderen Fall einer vom Verf. früher [C. R. Acad. Sci., Paris 188, 544 (1929)] gefundenen Familie algebraischer Profile kann die Lösung angegeben werden, welche auf den Kreis und die Ellipse angewandt wird.

Steuding (Oschersleben).<sub>o</sub>

**Poloubarinova-Kochina, P.:** On the integral equation of the theory of tides in reservoirs of constant depth. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 2, 249—269 u. engl. Zusammenfassung 269—270 (1938) [Russisch].

Die Schwingungsbewegung der Flüssigkeit in einem sich drehenden Gefäß gleicher Tiefe wird durch die Differentialgleichung  $\Delta z + (\lambda^2 - \varepsilon^2)z = 0$ , wo  $\lambda$  die reduzierte Eigenfrequenz der Flüssigkeitsbewegung und  $\varepsilon$  die reduzierte Winkelgeschwindigkeit des sich drehenden Gefäßes bedeuten (in der Bezeichnung von Lamb, Hydrodynamik, 2. Aufl. 1931, S. 354, entspricht  $\lambda^2 = \sigma^2/gh$  und  $\varepsilon^2 = 4\omega^2/gh$ ), mit der Randbedingung  $i\lambda \partial z / \partial n + \varepsilon \partial z / \partial s = 0$  beschrieben. Verf. zeigt, daß dieselbe Aufgabe auf die Lösung der Integralgleichung  $U(x, y) = (\lambda^2 - \varepsilon^2) \iint_S H(x, y, \xi, \eta) U(\xi, \eta) dS + \frac{1}{S} \iint_S U(\xi, \eta) dS$  wo  $S$  die Integrationsfläche bedeutet, zurückgeführt werden kann. Hierbei ist der Kern  $H$  eine Greensche Funktion, welche der Differentialgleichung  $\Delta H = \frac{1}{S}$  mit der Randbedingung  $\lambda \partial H / \partial n + i\varepsilon \partial H / \partial s = 0$  genügen muß.

Steuding (Oschersleben).<sub>o</sub>

**Endô, Dyûdô:** The forces on two spheres placed in uniform flow. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 667—703 (1938).

By using bipolar coordinates a series of derivatives of the Legendre function  $P_n(\mu)$  is obtained for the stream-function  $\Psi$ . The coefficients can be found and the resultant fluid pressures calculated. An expression is obtained also for the velocity potential as a series in which the coefficients may be calculated step by step. The appendix contains expressions for a large number of integrals containing Legendre functions and tables for  $x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  of  $P_n(x)$ ,  $P'_n(x)$ ,  $Q_n(x)$ ,  $Q'_n(x)$  for  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

H. Bateman (Pasadena).

**Louchinin, D. J.:** On the application of the method of infinite systems to the solution of the two-dimensional problem of the theory of elasticity. Rec. math. Moscou, N. s. 3, 483—505 u. engl. Zusammenfassung 506—508 (1938) [Russisch].

Um die Fundamentalaufgabe der Elastizitätstheorie für einen ebenen einfach-zusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{B}^2$  zu lösen, genügt es nach Muschelišvili (im Falle der vorgegebenen Randverschiebungen), zwei im Einheitskreise  $\mathfrak{E}^2$  reguläre Funktionen  $\varphi(z) = \sum a_n z^n$ ,  $\psi(z) = \sum a'_n z^n$  zu finden, für die bei der Annäherung an den Rand  $\chi\varphi(t) - \omega(\sigma)[\omega'(\sigma)]^{-1}\varphi'(\sigma) - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu(q_1 + iq_2)$  gilt, wobei  $\omega(z) = \sum b_n z^n$  diejenige Funktion bedeutet, welche  $\mathfrak{E}^2$  auf  $\mathfrak{B}^2$  abbildet,  $\chi, \mu$  sind Materialkonstanten,

$2\mu(q_1 + iq_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma$  ist eine bekannte Funktion. (Analoge Gleichung gilt bei vorgegebenen Randkräften.) Der Verf. setzt nun für alle auftretenden Funktionen die entsprechenden Potenzreihen ein. Zur Bestimmung der  $a_n, a'_n$  erhält er dann ein System von unendlich vielen Gleichungen. Indem man  $b_m = 0$ ,  $m > 1$  setzt, erhält man ein Gleichungssystem, aus dem die ersten Annäherungen  $a_n^{(0)}, a'_n{}^{(0)}$  bestimmt werden. Man kann dann sukzessive die weiteren Annäherungen  $a_n^{(m)}, a'_n{}^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  berechnen. Das Verfahren konvergiert, wenn  $|b_n| \leq c n^{-p}$ ,  $|A_n| \leq c n^{-p}$ ,  $p > 2$ ,  $c < \infty$  gilt. Auf analoge Weise wird der Fall der vorgegebenen Randkräfte und zweifachzusammenhängenden Gebiete behandelt. Es wird ausführlicher der Fall eines elliptischen Ringes besprochen. — Der Ref. würde es als sehr wünschenswert betrachten, daß der Verf. an konkreten Beispielen untersuchen würde, in welchen Fällen — vom Standpunkte der effektiven Rechnung — seine Methode vorteilhafter ist als

die bis jetzt bekannten Verfahren, z. B. die Heranziehung von Integralgleichungen oder Entwicklung nach Orthogonalfunktionen [s. Math. Ann. 98, 248—263 (1927)].

Stefan Bergmann (Tbilissi).

**Magnaradze, L.:** Solution of the fundamental problems of plane theory of elasticity in the case of contours with corners. C. R. Acad. URSS, N. s. 19, 673—676 (1938).

**Magnaradzé, L.:** Les problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité à deux dimensions pour les contours à points anguleux. Trav. Inst. Math. Tbilissi 4, 43—74 u. franz. Zusammenfassung 75—76 (1938) [Russisch].

Vgl. auch dies. Zbl. 6, 341. Die Lösung der Fundamentalgleichungen der Elastizitätstheorie im ebenen Falle kann nach Muschelišvili (dies. Zbl. 2, 251, 252) zur Auffindung zweier im Gebiete analytischer Funktionen  $\varphi, \psi$  zurückgeführt werden, welche am Rande  $C$  die Bdg.  $\overline{\varphi(t)} + t\varphi'(t) + \psi(t) = t_1 - if_2$  (gegebene äußere Kräfte) bzw.  $\kappa\overline{\varphi(t)} - t\varphi'(t) - \psi(t) = 2\mu(g_1 - ig_2)$  (gegebene Randverschiebungen) erfüllen.  $f_k, g_k$  sind bekannte Funktionen (welche die Hölderbedingung erfüllen müssen),  $\mu, \kappa$  Materialkonstanten. — Muschelišvili zeigt, daß die Auffindung von  $\varphi, \psi$  zur Lösung von Integralgleichungen vom Fredholmschen Typus führt, wenn  $C$  genügend regulär ist (z. B. keine Eckpunkte besitzt). — Der Verf. behandelt den Fall, wenn  $C$  eine Kurve ist, mit beschränkter Drehung und die einzelnen Ecken  $< \pi$  sind. Bezeichnet man mit  $\alpha + \beta$  bzw.  $\beta$  die Winkel, welche die Tangenten an  $C$  im Punkte  $t_0$  von  $C$  mit der positiven  $x$ -Achse bilden, so erhält man im Falle der gegebenen Randkräfte zur Bestimmung von  $\varphi$  die Gleichung

$$\alpha\pi^{-1}\overline{\varphi(t_0)} + \pi^{-1}\sin\alpha e^{-i(\alpha+2\beta)}\varphi(t_0) - \pi^{-1}\int_C [\overline{\varphi(t)} + \varphi(t)e^{-2it}]dF = -A(t_0),$$

wo  $F$  der Winkel zwischen dem Vektor  $t_0t$  und der  $x$ -Achse bedeutet und  $A(t) = \lim_{z \rightarrow t} (2\pi i)^{-1} \int_C (f_1 - if_2)(t - z)^{-1} dt$  bedeutet. Eine analoge Gleichung gilt im

Fall der gegebenen Randverschiebungen. — In beiden Fällen lassen sich die Gleichungen

auf die Form  $\Phi(t_0) - (2\pi)^{-1} \int_0^{2l} \Phi(t) K(F) dF = C(t_0)$  bringen, wo  $l$  die Länge von  $C$

ist;  $\Phi = Re(\varphi)$  für  $0 \leq t \leq l$ ,  $= Im[\varphi(t - l)]$  für  $l \leq t \leq 2l$ ;  $K(F) = 1 + m \cos 2F$ ,  $= m \sin 2F$  bzw.  $= 1 - m \cos 2F$  je nachdem, welchen Wert  $t$  bzw.  $t_0$  hat und  $m = 1$  bzw.  $\kappa^{-1}$  ist. Auf diese Weise erhält der Verf. zur Bestimmung von  $\Phi$  eine Integralgleichung, die, wie er zeigt, ein Spezialfall der von Radon (S.-B. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Klasse Abt. IIa 1913, 1295; 1919, 1083) behandelten Funktionalgleichungen bildet. — Unter Benutzung eines Vorganges von Šerman [Doklady Akad. Wiss. URSS 4, 127 (1935); dies. Zbl. 13, 116] zeigt der Verf., daß 1 kein Eigenwert der angegebenen Integralgleichung ist, so daß man nach der Radonschen Theorie eine Lösung für  $\Phi$  erhält, woraus man dann  $\varphi$  und  $\psi$  bestimmen kann. — Für rechnerische Zwecke ist es vorteilhafter, die von Carleman (Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken) angegebene Methode heranzuziehen, weshalb der Verf. die erwähnte Integralgleichung auch mit Hilfe dieses Verfahrens behandelt.

Stefan Bergmann (Tbilissi).

**Somigliana, C.:** Procedimenti di calcolo per l'estensione del teorema di Clairaut al geoide ellissoidico a tre assi. Rend. Semin. mat. fis. Milano 11, 109—123 (1937).

Nach kurzem Hinweis auf eine elegante Ableitung des Clairautschen Theorems in seiner allgemeinsten Form werden gewisse elliptische Integrale in Reihen fortschreitend nach Funktionen entwickelt, die eine natürliche Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kugelfunktion für zwei unabhängig Veränderliche sind; verwandte Aufgaben stellen sich bekanntlich bei Entwicklung der Störungsfunktion in der Mechanik des Himmels ein. In den Grundzügen wird sodann unter Verwendung der eingeführten Funktionen ein Verfahren zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen zwischen Funktionen zweier Veränderlichen mit Hilfe von Potenzreihen auseinandergesetzt.



Anwendung finden die Darlegungen auf die Berechnung jener Funktionen, die in dem auf das dreiaxige Niveausphäroid verallgemeinerten Clairautschen Theorem auf-scheinen.

*Hopfner* (Wien).<sup>o</sup>

**Meksyn, D.:** *Green's function for an ellipse, and its application to the motion of a point vortex.* Proc. roy. Soc. Edinburgh 58, 176—180 (1938).

Verf. hat früher (Zbl. Mech. 6, 369) die Greensche Funktion für die Ebene außerhalb einer Ellipse als eine unendliche Summe berechnet. Diese wird hier in geschlossener Form gegeben. In ähnlicher Weise wird die Greensche Funktion für eine von zwei konfokalen Ellipsen begrenzte Fläche als eine gleichfalls in geschlossener Form berechnete Doppelsumme dargestellt. Als Anwendung wird die Bewegung eines Wirbels außerhalb einer Ellipse berechnet.

*T. Gustafson* (Lund).

**Evans, Griffith C.:** *Dirichlet problems.* Amer. Math. Soc., Semicent. Publ. 2, 185—226 (1938).

C'est un exposé du problème de Dirichlet classique et généralisé dans un domaine quelconque de l'espace et de certains autres problèmes qui s'y rattachent et concernent l'existence ou la représentation des fonctions harmoniques. L'auteur applique dans cet exposé les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel newtonien développées entre autres par C. de la Vallée Poussin [Ann. Inst. H. Poincaré 2, 169—232 (1932); ce Zbl. 4, 114], par O. Frostman (Thèse Lund 1935; ce Zbl. 13, 63—64) et par l'auteur, lui-même [Trans. Amer. Math. Soc. 37, 226—253 (1935) et 38, 201—236 (1935); ce Zbl. 11, 212 et 12, 300]; ces méthodes sont basées sur deux notions fondamentales: sur le potentiel d'une distribution de masse défini par l'intégrale de Stieltjes-Lebesgue-Radon

$$u(P) = \int_E \frac{1}{PQ} d\mu(e_Q), \quad (1)$$

où  $\mu(e)$  est une fonction complètement additive d'ensemble borelien représentant une masse finie (positive ou négative) répartie dans un ensemble borné  $E$ , et sur l'énergie de cette distribution donnée par l'intégrale

$$J(\mu) = \int_E d\mu(e_P) \int_E \frac{1}{PQ} d\mu(e_Q) = \int_E u(P) d\mu(e_P). \quad (2)$$

Le mémoire se compose de 4 parties. Dans la partie I l'auteur donne les définitions et certaines propriétés du potentiel, de l'énergie, du noyau de masse, de la capacité etc. en démontrant entre autres que: l'intégrale d'énergie (2) est toujours non-négative et elle ne peut s'annuler que si les masses s'évanouissent. Un rôle important joue dans cet exposé la notion de „conductor potential“ d'un ensemble fermé et borné  $F$  que l'auteur introduit en suivant une méthode de Frostman basée sur l'existence d'une distribution de la masse unité qui rend minimum l'intégrale d'énergie (2). Si la capacité de  $F$  est positive le „conductor potential“ de  $F$  est égal à l'unité sur  $F$  à l'exception d'un ensemble de capacité nulle. — La partie II contient une étude approfondue du „conductor potential“ et des points „réguliers“ d'un domaine par rapport au „conductor potentiel“ ou à la fonction de Green; ensuite une construction de la solution du problème généralisé de Dirichlet analogue à celle de Wiener et une étude de cette solution dans le voisinage des points frontières du domaine. — Les parties III et IV sont consacrées à des différents problèmes connexes comme celui de Plateau, à la propriété extrémale de l'intégrale de Dirichlet etc.

*F. Leja* (Kraków).

**Brelot, M.:** *Fonctions sous-harmoniques et balayage. II.* Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 421—436 (1938).

In this paper, the author continues his program of unification (I. see this Zbl. 19, 215), on the basis of the theory of subharmonic functions, of recent work in potential theory, with particular reference to the sweeping-out process. We quote two theorems, concerned with harmonic majorants of subharmonic functions, which play a fundamental role and also illustrate the general character of the presentation. —

**Theorem.** Let there be given, in a bounded domain  $D$  with boundary  $F$ , a non-positive mass distribution  $\theta$  whose potential is  $u$ . Then there exists on  $F$  a unique non-positive mass distribution  $\varrho$  whose potential  $v$  is such that 1)  $v = u$  on the exterior of  $D$  and on the set of the regular points of  $F$ , and 2)  $v \geq u$  in  $D$ . This potential  $v$  is then everywhere  $\geq u$ , and in  $D$  it is equal to both the least and the best harmonic majorant of  $u$ . — **Theorem.** Let  $u$  be subharmonic in a domain which contains a bounded domain  $D$  together with its boundary  $F$ . Let  $-m$  be the non-positive mass distribution whose potential differs from  $u$  in  $D$  by a harmonic function. Denote by  $\bar{u}(P)$ ,  $u^*(P)$  the best and the least harmonic majorants of  $u$  in  $D$  respectively. Then

$$\bar{u}(P) - u^*(P) = \int_F G(P, Q) dm(Q)$$

where  $G(P, Q)$  is the Green's function of  $D$ .

*Tibor Radó (Columbus).*

**Irie, Seiiti:** Sur un théorème de M. Beurling. Proc. Imp. Acad. Jap. 13, 244—246 (1937).

Es sei  $U(z)$  harmonisch und beschränkt in einem Gebiet mit dem Randpunkt  $z_0$ . Für die Randpunkte  $z'$  sei  $\lim_{z' \rightarrow z_0} \lim_{z \rightarrow z'} U(z) \leq m$ . Unter der Voraussetzung, daß  $z_0$  zu einem Randkontinuum gehört und vom Innern her erreichbar ist, gilt dann  $\lim_{z \rightarrow z_0} U(z) \leq m$ . Für diesen Satz, der unter allgemeineren Bedingungen schon von Beurling bewiesen wurde, gibt Verf. einen neuen Beweis, der mit elementaren harmonischen Majoranten arbeitet.

*Ahlfors (Helsingfors).*

### **Funktionalanalysis, Funktionalräume:**

**Ionesco, D. V.:** Généralisation d'une équation fonctionnelle de M. D. Pompeiu. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 431—440 (1938).

First part: Let  $\xi, \eta$  be the centre of gravity of the domain  $A$ . The functional equation

$$\int_A f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot \{\text{area of } A\}$$

holding for all triangles  $A$ , has the only continuous solution  $f(x, y) = px + qy + r$ . If the same equation is satisfied for all quadrangles whose sides are parallel to the coordinate axes,  $f(x, y)$  must be  $kxy + px + qy + r$ . The functional equation

$$g(x_1, y_1) - g(x_1, y_2) - g(x_2, y_1) + g(x_2, y_2) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) g''_{xy} \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

is also considered. — Second part: Based on certain results of Anghelutza (voir ce Zbl. 4, 7) the continuous solutions of the functional equation

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} f(x, y) g(x, y) dx dy = f \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} g(x, y) dx dy$$

are discussed.

*G. Szegő (Stanford U., Cal.).*

**Julia, Gaston:** Sur la résolubilité des systèmes d'équations linéaires dans un espace hilbertien. J. Math. pures appl., IX. s. 17, 425—437 (1938).

$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots)$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots)$  seien Vektoren des Hilbertschen Raumes  $H$ ,  $A_i^*$  sei der Vektor mit den konjugiert komplexen Koordinaten  $\bar{a}_{ik}$ . Es wird das Gleichungssystem (1)  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = (A_i^*, X) = y_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) betrachtet. Der durch  $A_1^*, A_2^*, \dots$

erzeugte lineare abgeschlossene Teilraum von  $H$  heiße  $V$ . Nach E. Schmidt [Rend. Circ. mat. Palermo 25, 53—77 (1908)] ist (1) dann und nur dann für jedes  $Y = (y_1, y_2, \dots)$  aus  $V$  lösbar, wenn  $\nu^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} n(H_p) > 0$  ist. Dabei ist  $n(H_p)$  das Minimum der hermiteschen Form  $H_p = \left| \sum_{i=1}^p \xi_i A_i^* \right|^2$  für  $|(\xi_1, \dots, \xi_p)|^2 = 1$ . Verf. beweist dies neu auf folgende

Weise: Sei zuerst  $V = H$ . Aus den  $A_i^*$  erhält man durch Orthogonalisierung Vektoren, die die Spalten der unitären Matrix  $U$  seien. Führt man neue Variable  $\xi = U^* X$



ein, so wird (1) zu (2)  $\alpha_{11}\xi_1 = y_1, \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = y_2, \dots$ . Die Matrix  $\alpha$  der  $(\alpha_{ik})$  besitzt eine formale Reziproke  $\beta$  derselben Gestalt, d. h.  $\beta_{ik} = 0$  für  $i < k$ . Aus einem Satz von E. Hellinger und O. Toeplitz [Math. Ann. **69**, 289—330 (1910)] ergibt sich jetzt leicht, daß (1) dann und nur dann für jedes  $Y$  aus  $H$  die Lösung  $\xi = \beta Y$  besitzt, wenn die Minima  $n(K_p)$  der Formen  $K_p = |\alpha_{11}\xi_1, \dots, \alpha_{p1}\xi_1 + \dots + \alpha_{pp}\xi_p|^2$  oberhalb einer festen Grenze  $> 0$  bleiben. Es ist aber  $n(K_p) = n(H_p)$ . Der allgemeine Fall  $V \neq H$  ist sofort auf diesen zurückzuführen. Sind die  $A_i$  die Zeilen einer beschränkten Matrix  $A$ , so ergibt sich damit ein neuer Beweis des Satzes von O. Toeplitz (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1907**, 101—109), daß  $A$  dann und nur dann eine rechte Reziproke besitzt, wenn  $\nu^2 > 0$  ist.

G. Köthe (Münster).

Michal, A. D.: Differential calculus in linear topological spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **24**, 340—342 (1938).

$T_1, T_2$  seien beliebige lineare topologische Räume,  $f(x)$  sei eine in  $T_1$  erklärte Funktion mit Werten in  $T_2$ . Es wird eine in  $\delta x$  lineare Funktion  $f(x; \delta x)$  als Differential von  $f(x)$  eingeführt mit den Eigenschaften: Existiert in  $x_0$  das Differential  $f(x_0; \delta x)$ , so ist es eindeutig, und  $f(x)$  ist in  $x_0$  stetig. Ist  $f_3(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ , so ist  $f_3(x_0; \delta x) = \alpha f_1(x_0; \delta x) + \beta f_2(x_0; \delta x)$ .  $\Phi(f(x))$  hat das Differential  $\Phi(f(x_0; \delta x))$ , wenn  $f(x)$  in  $x_0$  und  $\Phi(y)$  in  $f(x_0)$  differenzierbar sind. Sind  $T_1$  und  $T_2$  Banachräume und ist  $f(x)$  in  $x_0$  im Sinne von M. Fréchet [Ann. École norm. **42**, 293—323 (1925)] differenzierbar, so ist  $f(x)$  im obigen Sinne differenzierbar, und die Differentiale sind gleich. Vergleich mit anderen Definitionen des Differentials. Ohne Beweise. Köthe.

Agnew, R. P., and A. P. Morse: Extensions of linear functionals, with applications to limits, integrals, measures, and densities. Ann. of Math., II. s. **39**, 20—30 (1938).

The authors generalize the Hahn-Banach theorem on the extension of linear functionals. The result is that if  $G$  is a solvable group of one to one linear mappings of the vector space onto itself which leave the domain of the function  $f$  to be extended invariant then if  $f$  has the property that  $f(g(x)) = f(x)$  for every  $x$  in the domain of definition of  $f$  and for every  $g$  of  $G$  there exists an extension  $F$  of  $f$  to the whole space which is invariant under the group, i. e.,  $F(g(x)) = F(x)$  always. Applications are given by defining generalized limits, integrals, measures, and densities. For example, Banach's generalized limit (Théorie des opérations linéaires, p. 33) may also be required to have the property  $\lim_{s \rightarrow \infty} \mu(s + \lambda) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu(s)$  if  $\mu > 0$ . N. Dunford (New Haven).

Neumann, J. v.: On infinite direct products. Compositio Math. **6**, 1—77 (1938).

The author extends the notion of a finite direct product  $\prod_{\alpha \in (1, \dots, m)} \mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_m$  of unitary spaces  $\mathfrak{H}_\alpha$  by defining an infinite direct product  $\prod_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$  of the unitary spaces  $\mathfrak{H}_\alpha$  where  $\alpha$  varies over an arbitrary set  $I$  (possibly non-denumerable). The infinite direct product is again a unitary space and its definition is based on a discussion of infinite sums and products of complex numbers. The convergence of a numerical sum  $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$  is defined in such a way that it is equivalent to the two statements: (I)  $z_\alpha \neq 0$  at most a denumerable number of times, say  $z_{\alpha_n} \neq 0$ ; and (II)  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{\alpha_n}| < \infty$  (in the usual sense). The sum  $\sum_{\alpha \in I} z_\alpha$  is then  $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\alpha_n}$ . Convergence of products is defined in an analogous fashion. The product is called quasi-convergent if and only if  $\prod_{\alpha \in I} |z_\alpha|$  is convergent.

The value of a quasi-convergent product is its usual value if convergent and otherwise zero. For a given family  $\mathfrak{H}_\alpha$  ( $\alpha \in I$ ) of unitary spaces  $C$ -sequences are defined as sequences  $f_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$ ,  $\alpha \in I$  for which  $\prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha\|$  converges. For a pair  $f_\alpha, g_\alpha$  of  $C$ -sequences the product  $\prod_{\alpha \in I} (f_\alpha, g_\alpha)$  is quasi-convergent and defines (considering  $\{f_\alpha\}$  fixed) a functional  $\Phi(g_\alpha; \alpha \in I)$  over the class of all  $C$ -sequences. This  $\Phi$  is denoted by  $\prod_{\alpha \in I} \otimes_{\alpha \in I} f_\alpha$ . The space  $\prod_{\alpha \in I} \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_\alpha$  is then the completed (in the sense of G. Cantor) space determined

by the finite linear aggregates  $\sum_{\alpha=1}^p \prod \otimes_{\alpha \in I} f_{\alpha, \nu}$ . Those  $C$ -sequences  $f_{\alpha}$  for which  $\prod \otimes_{\alpha \in I} f_{\alpha} \neq 0$  are called  $C_0$  sequences and two  $C_0$  sequences are called equivalent if and only if  $\sum_{\alpha \in I} |(f_{\alpha}, g_{\alpha}) - 1|$  converges. This equivalence relation, being reflexive, symmetric, and transitive, divides the set of all  $C_0$ -sequences into mutually disjoint classes. A theorem of importance is that the functionals  $\prod \otimes_{\alpha \in I} f_{\alpha}$ ,  $\prod \otimes_{\alpha \in I} g_{\alpha}$  determined by  $C_0$  sequences in two different equivalence classes are orthogonal. An essential difference between the finite direct products and the infinite ones is that the latter "split up" into  $\mathfrak{C}$ -adic incomplete direct products,  $\prod^{\mathfrak{C}} \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_{\alpha}$  which are defined to be the closed linear manifolds in  $\prod \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_{\alpha}$  determined by  $\prod \otimes_{\alpha \in I} f_{\alpha}$  where  $\{f_{\alpha}\}$  varies over an equivalence class  $\mathfrak{C}$ . These closed linear manifolds are mutually orthogonal and determine the whole space. While the commutative law of multiplication holds in an unrestricted sense for the infinite direct products, the associative law holds only in the incomplete direct products  $\prod^{\mathfrak{C}} \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_{\alpha}$ . The paper concludes with a discussion of the relationship between bounded linear operators and rings of such operators in the various  $\mathfrak{H}_{\alpha}$  with those in  $\prod \otimes_{\alpha \in I} \mathfrak{H}_{\alpha}$  and constitutes in part a generalization of the authors joint work with F. J. Murray (see this Zbl. 14, 161). *N. Dunford.*

**Taylor, A. E.:** Linear operations which depend analytically on a parameter. *Ann. of Math.*, II. s. 39, 574—593 (1938).

If to each  $\lambda$  in an open set  $\Delta$  in the complex plane is assigned a continuous linear operator  $A_{\lambda}$  mapping one Banach space  $E$  on to another  $E'$  and if  $A_{\lambda}$  is analytic in the sense that for each  $x$  in  $E$  the function  $A_{\lambda}x$  on  $\Delta$  to  $E'$  has a derivative then the difference quotients defining this derivative converge uniformly with respect to  $x$  in the unit sphere of  $E$ . In other words if  $A_{\lambda}$  is analytic in the strong topology of the operators on  $E$  to  $E'$  it is also analytic in the uniform topology of these operators. The forms of analytic linear functionals (i. e.,  $A_{\lambda}$  numerically valued) are determined for several spaces. If  $A_{\lambda} = (a_{ik}(\lambda))$  is a bounded linear operator in Hilbert space it is analytic in  $\Delta$  if and only if each  $a_{ik}(\lambda)$  is analytic in  $\Delta$  and the matrix  $(a_{ik}(\lambda))$  is uniformly bounded on each bounded closed subset of  $\Delta$ . If  $A_{\lambda}$  on  $E$  to  $E$  is analytic for  $|\lambda| < r$  then the equation  $dx/d\lambda = A_{\lambda}x$ ,  $x(0) = y$  admits a unique solution analytic in  $|\lambda| < r$ . The inverse  $A_{\lambda}^{-1}$ , if existing at all as a bounded linear operator, exists on an open subset of  $\Delta$  and is analytic there. *N. Dunford* (New Haven).

### **Funktionentheorie:**

**Gontcharoff, W.:** Sur un théorème de M. Mandelbrojt. *Rec. math. Moscou*, N. s. 3, 673—675 (1938).

L'A. rappelle le résultat suivant qu'il a publié en 1927 (*Commun. Soc. Math. Kharkov*, IV. s. 2, 41—48): Soit  $f(x)$  une fonction analytique d'une variable réelle  $x$ , définie dans un intervalle quelconque fini ou infini; soit  $R(t)$  le rayon de convergence du développement taylorien au point  $x = t$ .  $R(t)$  satisfait aux inégalités suivantes: 1°  $R(t) > 0$ , 2°  $|R(t_1) - R(t_2)| < |t_1 - t_2|$ , 3° le déterminant dont les lignes sont respectivement 1, 1, 1;  $t_1, t_2, t_3$ ;  $R^2(t_1) - t_1^2, R^2(t_2) - t_2^2, R^2(t_3) - t_3^2$  est négatif ou nul. Inversement si  $R(t)$  vérifie ces inégalités on peut construire une fonction  $f(x)$  dont le rayon de convergence en  $x = t$  soit  $R(t)$ . La connaissance de  $R(t)$  permet de faire certaines remarques concernant les singularités de  $f$ . On forme l'ensemble des points de coordonnées  $(t - R(t)R'(t), \pm R(t)\sqrt{1 - R'^2(t)})$  pour les valeurs de  $t$  où  $R(t)$  est dérivable, et des points des arcs de cercles

$$L(t)\{(x - t)^2 + y^2 = R^2(t), t - R(t)R'_a(t) \leq x \leq t - R(t)R'_g(t)\}$$

pour les valeurs de  $t$  où  $R(t)$  n'est pas dérivable, l'existence des dérivées droite et gauche  $R'_a$  et  $R'_g$  étant une conséquence de 3°. Cet ensemble est une courbe de Jordan que chaque droite parallèle à l'axe imaginaire ne rencontre qu'en un seul point. La



fonction  $f(x)$  est holomorphe dans la région située entre cette courbe et l'axe réel; la courbe elle-même est formée des points singuliers de  $f(x)$ , excepté les points intérieurs aux arcs  $L(t)$ , au sujet desquels on ne sait rien. En particulier, si la fonction  $R(t)$  est dérivable dans l'intervalle entier, la courbe de Jordan considérée est une coupure pour la fonction  $f(x)$ . L'A. ajoute que, bien qu'il se soit placé à un point de vue différent de celui auquel s'était placé Mandelbrojt pour établir le théorème concernant les arguments des singularités, on peut, en appliquant le théorème de Cauchy-Hadamard, tirer de son théorème la remarque faite par Mandelbrojt à la fin de sa Note [C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1456 (1937); ce Zbl. **16**, 308] et, en employant en plus la transformée d'Euler, obtenir, à partir du résultat de Gontcharoff, le théorème de Mandelbrojt. Malheureusement nous devons constater que le résultat de G., que nous venons d'exposer, n'est pas exact. Si  $E_1$  et  $E_2$  désignent deux ensembles fermés quelconques dont la réunion donne un intervalle fermé (ou tout l'axe), et si l'on désigne par  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  les deux ensembles dont le premier est composé des points de la forme  $x' + i$  où  $x' \in E_1$  et le second des points  $x'' - i$  avec  $x'' \in E_2$ , on peut choisir  $E_1$  et  $E_2$  de sorte que ni  $\mathcal{G}_1$  ni  $\mathcal{G}_2$  ne soient pas des courbes de Jordan (ni  $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ ); la fonction  $f$  admettant comme seules singularités les ensembles  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  admet  $R(t) = 1$  ( $-\infty < t < \infty$ ),  $R'(t) = 0$ , aucun point  $x + i$  n'appartenant à  $\mathcal{G}_1$  ni aucun point  $x - i$  n'appartenant à  $\mathcal{G}_2$  n'est singulier pour  $f$  (Il ne peut être question de coupure ni de courbe de Jordan.) D'ailleurs la fonction admettant comme seules singularités les points  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  est telle qu'une des extrémités de chacun des arcs  $L(0)$  est point régulier, contrairement à l'affirmation de G. A moins que, dans tout ce qui précède, G. suppose que  $f$  est réel pour  $x$  réel. [Remarquons que Mandelbrojt a démontré déjà en 1926 [J. de Math. **5**, 204 et 206 (1926)] que, si toutes les singularités sont sur  $|z| = 1$ , l'un des points  $e^{\pm i\varphi}$  où  $\cos\varphi = 1 - \frac{K^2}{2}$ , avec  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_1 - c'_n a_2 + \dots \pm a_n|}$ , est le point singulier de  $\sum a_n z^n$  le plus rapproché du point  $-1$ . On voit de même sans rien changer au raisonnement qu'en posant  $K(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_1 h^n - c'_n a_2 h^{n-1} \pm a_n|}$  on a  $\cos\varphi = \frac{1 + h^2 - K^2(h)}{2h}$  ( $h > 0$ ) et un simple passage à la limite ( $h \rightarrow 0$ ) permet de trouver le résultat général de Mandelbrojt c'est d'ailleurs ce raisonnement qui a été employé par Mandelbrojt en 1937.) *Mandelbrojt.*

**Lammel, Ernst:** Über Reihen von der Form  $A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_{\mu}}{1 - \bar{a}_{\mu} z}$ . *Mh. Math. Phys.* **46**, 432—440 (1938).

Verf. hat schon in einer Reihe von Noten Interpolationsreihen obiger Form zur Darstellung von regulären Funktionen besonders im Einheitskreis herangezogen und untersucht (u. a. dies. Zbl. **15**, 215; **16**, 20, 362); da sie beim Zusammenrücken aller  $a_{\mu}$  nach  $z = 0$  in Potenzreihen übergehen, liegt es nahe, die Analogie zu diesen zu verfolgen. Das gelingt, und wird hier für zwei Sätze von M. Riesz durchgeführt; die  $a_{\mu}$  werden alle in  $|z| \leq \rho < 1$  angenommen. — Ist  $S$  ein abgeschlossener Bereich, der aus  $|z| \leq R$  ( $R > 1$ ) durch Fortlassen einer offenen Winkelumgebung der positiv reellen Achse  $z > 1$  entsteht, und  $f(z)$  stetig auf  $S$ , sowie dort regulär analytisch außer in  $z = 1$ , so konvergiert die Reihenentwicklung gleichmäßig auf  $|z| = 1$ . — Für  $A_{\nu} \rightarrow 0$  konvergiert die Reihe gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Regularitätsbogen des  $|z| = 1$ . Die Beweise sind fast unmittelbare Übertragungen von den entsprechenden bei Potenzreihen. *Ullrich (Gießen).*

**Satô, Tunesô:** On the proof of Carleman's extension theorem of Liouville theorem. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* **21**, 47—49 (1938).

D'après les formules de Nevanlinna et le théorème de Liouville, si  $f(z)$  est une fonction entière de  $z = re^{i\varphi}$ , et si la fonction  $m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$  reste

bornée,  $f(z)$  est constante. L'aut. donne une nouvelle démonstration de cette propriété, basée sur la convexité de  $m(r)$  en  $\log r$ . Il montre plus généralement que, si  $f(z)$  est holomorphe pour  $|\varphi| \leq \alpha$ ,  $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi$  est convexe en  $\log r$  d'après les théorèmes de Montel (J. Math. pures appl. 1928) et que, si cette moyenne reste bornée,  $f(z)$  est borné. L'aut. déduit de là et d'une inégalité de Schlömilch une démonstration nouvelle simple de ce théorème de Carleman [Acta math. 48 (1926)]: Si  $\omega(\varphi) \geq 0$  et si  $\int_0^{2\pi} \omega(\varphi) d\varphi$  est borné, une fonction entière  $f(z)$  telle que  $\log |f(z)| < e^{\omega(\varphi)}$  pour tous les  $\varphi$  est une constante. Le théorème relatif à la moyenne dans l'angle  $|\varphi| \leq \alpha$  conduit à un autre théorème de Carleman. [Note du Réf. L'extension des propriétés de  $m(r)$  au cas de l'angle ne semble pas certaine; pour  $2e^{-z}$ ,  $ze^{-z}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , la moyenne est bornée, mais non pas constante.]

G. Valiron (Paris).

**Srivastava, P. L.:** On the Phragmén-Lindelöf principle. Allahabad Univ. Studies, Sect. Sci., 13, 85—90 (1937).

L'aut. démontre des propositions énoncées antérieurement par lui dans une courte Note [Proc. Nat. Acad. Sci. India 6 (1936)]. La proposition principale a été donnée dans ce Zbl. 15, 164.

G. Valiron (Paris).

**Lee, Kwok Ping:** On the directions of Borel of meromorphic functions of finite order  $> \frac{1}{2}$ . Compositio Math. 6, 285—295 (1938).

Démonstration détaillée d'une proposition énoncée antérieurement par l'aut. [C. R. Acad. Sci., Paris 206 (1938)] et déjà donnée dans ce Zbl. 18, 142. G. Valiron (Paris).

**Kolmogoroff, André:** Une généralisation de l'inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 764—765 (1938).

L'A. énonce le théorème important suivant, qui généralise un résultat récent de M. Gorny [C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1245—1247 (1938); ce Zbl. 19, 72]: La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction  $f(x)$  avec les bornes supérieures  $M_0, M_k, M_n$  données ( $M_k = \sup |f^{(k)}(x)|$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < k < n$ ) s'exprime par l'inégalité  $M_k \leq C_{kn} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$ , où  $C_{kn} = K_{n-k}/K_n^{1-\frac{k}{n}}$ , avec

$K_i = \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{3^{i+1}} - \frac{1}{4^{i+1}} + \dots \right)$  pour  $i$  pair et  $K_i = \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2^{i+1}} + \frac{1}{3^{i+1}} + \frac{1}{4^{i+1}} + \dots \right)$  pour  $i$  impair.

Mandelbrojt (Paris).

**Schiffer, Menahem:** Sur un théorème de la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 520—522 (1938).

The methods of previous papers (this Zbl. 19, 222) are used to show that if  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  is regular and univalent in a given domain  $D$ , and has the smallest possible maximum modulus for functions of its class, then it represents  $D$  on the interior of a circle  $|z| < M$  cut by concentric arcs. Macintyre (Aberdeen).

**Barbilian, D.:** Über die Metrik der geschlossenen Riemannschen Flächen. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 201—207 (1938).

Felix Klein hat den Zusammenhang zwischen einer algebraischen Kurve und der von dem reellen Punkt einer laufenden komplexen Tangente erzeugten Fläche untersucht (Ges. Abh. 38 u. 40). Der Verf. will auf diesem Wege und im Anschluß an einige neuere funktionentheoretische Arbeiten des Ref. (dies. Zbl. 17, 36) eine projektiv invariante Metrik auf einer geschl. Riemannschen Fläche einführen. Die Gleichung der Kurve sei in homogenen Punktkoordinaten  $y_i = y_i(w)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Die Metrik der Fläche wird dann durch  $ds = \lambda |dw|$ ,  $\lambda^2 = |\Delta \log(y\bar{y}'\bar{y})|$  (dreireihige Determinante) erklärt. Diese Metrik hat auf der zugehörigen Kleinschen Fläche projektiven Charakter und kann übrigens als Cayleysche Maßbestimmung aufgefaßt werden.



Im allgemeinen ist sie jedoch mit gewissen Singularitäten behaftet, die von reellen Wendetangenten, isolierten Doppeltangenten u. dgl. herrühren. Durch Zählung dieser Singularitäten und Anwendung der Gauß-Bonnetschen Formel gelangt der Verf. u. a. zu einer Darstellung des Geschlechts durch eine projektive Integralinvariante.

*Ahlfors (Helsingfors).*

**Lelong, P.: Limitation d'une fonction analytique de deux variables complexes à l'intérieur d'un domaine ayant une surface remarquable.** Bull. Sci. math., II, s. 62, 199—204 (1938).

Ein Bereich  $\mathfrak{B}$  im  $R_4$ , der lediglich von endlich vielen analytischen Hyperflächen begrenzt wird, hat die Eigenschaft, daß jede im abgeschlossenen Bereiche  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion ihr Maximum auf den 2dim. Schnittmannigfaltigkeiten der analytischen Hyperflächen annimmt. (Sofern die Funktion nicht konstant ist oder eine ihrer Werteflächen nicht stückweise ganz auf dem Rande liegt, nimmt sie das Maximum auch nur dort an.) Diese Schnittmannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}$  (von Stefan Bergmann Maximalfläche genannt) spielen in mancher Hinsicht die Rolle des Randes von Gebieten der komplexen Ebene. — Verf. betrachtet nun gewisse weitere 2dim. Flächen  $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{M}$  des Randes mit ähnlichen Eigenschaften. Für  $|f| < m$  auf  $\mathfrak{S}$  werden Abschätzungen von  $f$  im Innern angegeben. Ferner werden die möglichen Schwankungen von  $f$  auf solchen Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{S}$  untersucht.

*Behnke (Münster).*

**Bohne, Wilhelm: Die nichtmittelpunktstreuen Automorphismen der Cartanschen Bereiche.** Münster i. W.: Diss. 1938. 55 S.

Unter einem Cartanschen  $(m, p)$ -Bereich mit dem Mittelpunkt  $(0, 0)$  versteht man einen Körper im  $R_4$ , der die Automorphismen:

$$w' = we^{im\varphi}, \quad z' = ze^{ip\varphi}, \quad m \cdot p \neq 0$$

aufweist. Ferner wird in der Arbeit immer vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt im Innern liegt und der Körper beschränkt ist. — Verf. beweist: Jeder  $(m, p)$ -Bereich, der nichtmittelpunktstreue Automorphismen gestattet, läßt sich für  $m \cdot p \neq \pm 1$  auf einen Reinhardtschen Körper (d. i. ein Körper mit zweiparametriger Drehungsgruppe) abbilden. Für  $mp = +1$  waren die Ausnahmekörper schon bekannt (siehe H. Cartan, dies. Zbl. 4, 220). Für  $mp = -1$  werden die Ausnahmen vom Verf. angegeben. — Damit übersieht man sämtliche Automorphismen der eigentlichen, beschränkten kreissymmetrischen Bereiche im  $R_4$ .

*Behnke (Münster).*

**Cartan, Henri: Sur le premier problème de Cousin.** C. R. Acad. Sci., Paris 207, 558—560 (1938).

Man sagt, daß die erste Aussage von Cousin in bezug auf einen Bereich  $\mathfrak{B}$  des Raumes  $R_n$  von  $n$  komplexen Veränderlichen zutrifft, wenn folgendes gilt: Zu jeder lückenlosen Verteilung von meromorphen Ortsfunktionen  $f_P(z_1, \dots, z_n)$  in  $\mathfrak{D}$  (die den Verträglichkeitsbedingungen genügen) gibt es eine in ganz  $\mathfrak{D}$  meromorphe Funktion  $F(z_1, \dots, z_n)$ , so daß in  $\mathfrak{U}(P)$  jeweils  $F - f_P$  regulär ist. — K. Oka hat bewiesen, daß die erste Aussage von Cousin sicher in allen schlichten Regularitätsbereichen des offenen  $R_n$  zutrifft (s. dies. Zbl. 17, 122). Verf. zeigte (s. dies. Zbl. 10, 309), daß im  $R_4$  die erste Aussage von Cousin höchstens in Regularitätsbereichen gilt. Nunmehr gibt er im  $R_6$  einen Bereich an (den einmal punktierten Trizylinder), in dem auch die erste Aussage von Cousin gilt, obwohl er offenbar kein Regularitätsbereich ist.

*Behnke (Münster).*

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

**Borel, Émile: Sur le pari mutuel.** C. R. Acad. Sci., Paris 207, 197—200 (1938).

L'Auteur étudie les problèmes de probabilités posés par le „pari mutuel“ et spécialement se demande à quelles conditions un tel jeu est équitable — à chaque coup ou tout au moins à la longue. Il y a d'ailleurs à distinguer suivant que les parieurs

sont renseignés sur les mises des autres parieurs ou ne le sont pas. L'Auteur examine d'abord le cas relativement simple où les événements sur lesquels on parie ont des probabilités bien déterminées et admises par tous. Puis, il passe au cas, généralement réalisé dans la pratique, où chaque parieur a son opinion personnelle sur les probabilités: sur un exemple, l'Auteur indique par quel mécanisme peut s'établir dans certaines conditions un équilibre des paris. Après avoir signalé des applications possibles à certains phénomènes économiques, l'Auteur observe que ses considérations supposent la notion de probabilité d'un cas isolé, qu'il admet quant à lui bien que certains auteurs la repoussent.

*R. Fortet (Paris).*

**Wegmüller, Walter:** Ausgleichung durch Bernstein-Polynome. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 36, 15—58 (1938).

The main portion of this paper is expository. In it the author develops known properties of the Bernstein polynomials which relate to their suitability for use in graduating data. The concluding portion illustrates their use with numerical data with some discussion.

*C. C. Craig (Ann Arbor).*

**Silberstein, Ludwik:** Short derivation of a fundamental probability formula. Philos. Mag., VII. s. 26, 223—224 (1938).

The continuous frequency function associated with a point binomial (Bernoulli) distribution is given by the well known formula

$$f(n, k) = \frac{e^{-(k-np)^2/(2pgn)}}{\sqrt{2\pi pgn}}.$$

This function is usually derived by a method based on Stirling's approximation for the factorials of large numbers. The author derives the function from the difference equation  $f(n+1, k) = pf(n, k-1) + qf(n, k)$ , the solution of which is shown to coincide with that of the heat equation

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{2} p \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}$$

where  $\lambda = k - np$ .

*H. T. Davis (Northwestern Univ.).*

● **Hammer, Hans-Karl:** Zu einer Theorie der Versuchszahlen. Über die wahrscheinlichste Anzahl von Versuchen, die zur Erreichung einer bestimmten Anzahl günstiger Ergebnisse nötig ist. Borna, Bez. Leipzig: Robert Noske 1938. IV, 62 S. u. 3 Fig. RM. 2.40.

Behandlung eines Problemkreises, wo etwa folgende Aufgabe typisch ist: Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß genau  $s$  Versuche nötig sind, damit ein Ereignis  $m$ -mal eintritt. Es wird kombinatorisch die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $s$  abgeleitet; Berechnung ihres Mittelwerts, ihrer Streuung usw., ferner Abschätzungen mit Hilfe der Stirlingschen Formel und des Gauß-Laplaceschen Integrals. Auch für das Schema der nichtzurückgelegten Kugel werden entsprechende Rechnungen durchgeführt.

*Herman Wold (Stockholm).*

**Schmidt, H.:** Der Befall der Gebäude durch den Hausbockkäfer. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg 4, 183—191 (1938).

Es sei  $F(t)$  die Zahl der Gebäude des Alters  $t$ . In einem Gebäude, welches einmalig vor einer Zeit  $t'$  befallen wurde, sind unter gewissen Voraussetzungen  $s = p \cdot e^{bt'}$  Larven vorhanden, wo die Konstante  $b$  die Intensität der Vermehrung angibt und die Konstante  $p$  die Zahl ist, die sich ergibt, wenn die durchschnittlich auf ein Weibchen entfallende Zahl der Männchen um 1 vermehrt wird. Gezeigt wird, daß es für die Lebensbedingungen des Hausbocks eine Grenze

$$C = \int_{t=0}^{\infty} F(t) dt : p \int_{t=0}^{\infty} \int_{t'=0}^t F(t) e^{bt'} dt dt'$$

gibt, unterhalb welcher er sich nicht behaupten kann, vorausgesetzt daß eine Akklimatisation an eintretende verschlechterte Lebensbedingungen nicht stattfindet. *Rehbock.*



**Doeblin, Wolfgang:** Sur les sommes d'un grand nombre de vecteurs aléatoires. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 511—513 (1938).

Let  $X_1, \dots, X_n$  be independent  $k$ -dimensional chance vectors, each with median the null vector. The author investigates the distribution of their sum  $S_n$ , which he supposes normalized so that the length of the side of the smallest closed  $k$ -dimensional cube containing  $S_n$  with probability  $\geq \alpha$  is  $\leq 1$  for some fixed  $\alpha > 0$ . Let  $C(\eta)$  be the  $k$ -dimensional cube of side length  $2\eta$ , center at the origin. Then some of the  $X_j$  may be outside this  $C(\eta)$  with probability  $> \eta^2$ . For the sum of the remaining  $X_j$ , the author substitutes the sum of a chance vector with an explicitly given Gaussian distribution and an independent chance vector with an explicitly given generalized Poisson distribution. The distribution of the new sum  $S'_n$  approaches that of  $S_n$  as  $\eta \rightarrow 0$ , and the degree of approximation depends only on  $\eta, k, \alpha$ . J. L. Doob.

**Camp, Burton H.:** Notes on the distribution of the geometric mean. Ann. math. Statist. 9, 221—226 (1938).

Es wird gezeigt, wie man in speziellen Fällen durch eine Transformation von Integralen die Verteilungsfunktion des geometrischen Mittels von unabhängigen Beobachtungen mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen kann. Dies ist insbesondere der Fall, wenn letztere gegeben ist durch  $(\log t)^{p-1}/t^2 \Gamma(p)$  oder durch  $\exp\left[-\frac{1}{2c^2}\left(\log \frac{t}{G}\right)^2\right]/t \subset \sqrt{2\pi}$ . W. Feller (Stockholm).

**Jeffreys, Harold:** The posterior probability distributions of the ordinary and intraclass correlation coefficients. Proc. roy. Soc., Lond. A 167, 464—483 (1938).

Much as in the theory of sampling, the normal correlation surface is used to obtain the posterior probability of the intraclass correlation coefficient as compared to the ordinary coefficient of linear correlation, the latter being shown to be a sufficient statistic for the former. The invariant properties of maximum likelihood and inverse probability are related in theoretical ways when not indeed identical, the differences being unimportant in practical problems of estimation. The usual distinction drawn between accidental and systematic errors is shown to be too sharp for application to some important cases of intraclass correlation. A new formulation is made of an appropriate significance test. Albert A. Bennett (Providence).

**Olshen, A. C.:** Transformations of the Pearson type III distribution. Ann. math. Statist. 9, 176—200 (1938).

The author carries through a general investigation into the effects upon the moments of some familiar transformations upon standard distribution curves, extending the results given by H. L. Rietz (1922) for normally distributed variates. Power transformations are applied to (a) Type III curves with all variates positive, and (b) Type III curves with mean zero and unit variance. Logarithmic transformations are applied to Type III curves with special discussion of the relative position of averages, of the contact at the ends of the range and of the higher moments. The problem of transforming a given unimodal distribution with finite range into a normal distribution is then examined. Extensive empirical use is made of tables by L. R. Salvosa [Ann. math. Statist. 1, 191—198 (1930)]. Albert A. Bennett (Providence).

**Marcinkiewicz, J.:** Sur une propriété de la loi de Gauss. Math. Z. 44, 612—618 (1938).

Es werden zwei Sätze bewiesen: 1. Es seien die  $x_k$  paarweise unabhängige stochastische Veränderliche mit derselben Verteilungsfunktion, und letztere habe endliche Momente beliebiger Ordnung. Die Summen  $\sum a_k x_k$  und  $\sum b_k x_k$  mögen konvergieren und derselben Verteilungsfunktion unterliegen. Dann gilt entweder, daß sich die Folgen  $a_k$  und  $b_k$  bloß durch die Reihenfolge unterscheiden, oder aber, daß die  $x_k$  normalverteilt sind. — 2. Es gibt keine charakteristische Funktion, die eine ganze Funktion der endlichen Ordnung  $p > 2$  ist und für welche der Konvergenzexponent der Nullstellen kleiner als  $p$  wäre. — Die Bedeutung des letzten Satzes liegt in der Möglichkeit,

daraus zu entnehmen, daß gewisse Funktionen keine charakteristischen Funktionen sind. In gleicher Richtung bewegt sich ein weiterer Satz, den Verf. als „presque banal“ bezeichnet, und der doch gelegentlich nützlich sein kann: Es sei  $\varphi(t)$  nichtkonstant und für alle reellen  $t$  definiert; in der Umgebung des Nullpunktes sei  $\varphi(t) = 1 + h(t) + o(t^2)$ , wobei  $h(t)$  ungerade ist und  $h(t) = o(t)$ . Dann ist  $\varphi(t)$  keine charakteristische Funktion.

W. Feller (Stockholm).

**Khintchine, A.: Zwei Sätze über stochastische Prozesse mit stabilen Verteilungen.** Rec. math. Moscou, N. s. 3, 577—583 u. deutsch. Zusammenfassung 584 (1938) [Russisch].

The author considers a stochastic process defined by the chance variables  $\{x_t\}$ ,  $-\infty < t < \infty$ , in which the increments  $x_{t+h} - x_t$  are independent for non-overlapping  $t$ -intervals, and have a stable distribution, depending only on  $h$ , with exponent  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$  (cf. P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. pp. 198 to 203). The distribution function of  $x_{t+h} - x_t$  can be assumed to be  $F(xh^{-1/\alpha})$ , where  $F(x)$  defines a stable distribution, of exponent  $\alpha$ . A function  $g(t)$  is an upper bound (or local upper bound) of the chance variables  $x_t - x_0$  if the probability that  $|x_t - x_0| \leq g(t)$  for all  $t > \tau$  (or for all positive  $t < \tau$ ) approaches 1, as  $\tau \rightarrow \infty$  (or  $\tau \rightarrow 0$ ). The following two theorems are proved. (1) If when  $t \rightarrow 0$ ,  $g(t) \rightarrow 0$ , and  $t^{-1/\alpha}g(t) \rightarrow \infty$

monotonically, then the convergence of the integral  $\int_0^1 g(t)^{-\alpha} dt$  is N.S. that  $g(t)$  be a local upper bound. (2) If  $t^{-1/\alpha}g(t) \rightarrow \infty$  monotonically the convergence of the integral  $\int_0^\infty g(t)^{-\alpha} dt$  is N.S. that  $g(t)$  be an upper bound.

J. L. Doob (Urbana).

● **Hostelet, Georges: Les fondements expérimentaux de l'analyse mathématique des faits statistiques.** (Actualités scient. et industr. Nr. 552. Le progrès de l'esprit. Exposés publiés par L. Brunshvieg. II.) Paris: Hermann & Cie. 1937. 71 pag. Frs. 15.—.

● **Hostelet, Georges: Le concours de l'analyse mathématique à l'analyse expérimentale des faits statistiques.** (Actualités scient. et industr. Nr. 585. Le progrès de l'esprit. Exposés publiés par L. Brunshvieg. III.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 70 pag. Frs. 15.—.

The author distinguishes three types of scientific method, (a) the abstract-deductive method of the classical rationalists, (b) the intuitive-empirical method, an antithesis of the former, (c) their essential synthesis in the experimental-abstract method. To explore statistical questions the author rejects as basis the experimental method of adhesion in favor of formal deduction, while not ignoring the necessary reference to such intuitive-empirical notions as biological species. The exponential function of the binomial curve is said to constitute an empirical mathematical scheme suited to the notion of perfect statistical group, and perfect specific character. The author's language is philosophical and critically didactic without attempt at mathematical derivations. He urges that the experimental postulates implied in the use of statistical formulas be made explicit, so that experimenters may be correctly informed as to the conditions which limit the experimental validity of supposed mathematical conclusions. — In volume III, the author continues his discussion of the methodology of scientific research, the nature of causal determination, and the philosophical aspects distinguishing formal, rational assumptions from the empirical data, and incidentally from the psychological aspects of intuition and discovery. Much space is devoted to criticisms of the views of Reichenbach, de Broglie, and Barzin on causality and determinism.

Albert A. Bennett (Providence).

**Jeffreys, Harold: The comparison of series of measures on different hypotheses concerning by standard errors.** Proc. roy. Soc., Lond. A 167, 367—384 (1938).

The author treats several problems which may be exemplified by the following. Denote by  $\bar{x}_i$  and  $\sigma_i^2$  the mean and the variance of  $n_i$  independent measurements of the same unknown magnitude  $a_i$  for  $i = 1, 2$ . It is assumed that the measurements



of the two sets follow normal laws of probability with unknown standard deviations  $S_i$ , and it is required to deduce a criterion to test the hypothesis  $q$  that  $a_1 = a_2$ . The same problem was already treated by the author and the criterion deduced was

$$K = \left( \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} \right).$$

Its justification is based on the posterior probabilities of  $q$  and of its negation  $\sim q$ , calculated starting with certain arbitrary assumptions concerning the probabilities a priori. At present the author finds that his original solution contains certain "anomalies" such as that, contrary to his expectation, on substituting  $\sigma_2 = 0$  one gets for  $K$  a value different from that which would follow from  $\sigma_1 = \sigma_2$  and  $n_2 = \infty$ . Accordingly he proceeds to substitute for his original assumptions concerning the a priori probabilities, certain new ones, of an equally arbitrary character, so as to obtain a "reasonable" final result. Among others it is assumed that the a priori probability distribution of  $S_i$  is represented by  $\text{const}/S_i$  for  $0 \leq S_i < +\infty$ , and the fact that its integral is divergent does not seem to be considered as any sort of difficulty. — The paper ends by a discussion of what values of  $K$  should lead to a rejection of the hypothesis tested.

*J. Neyman (Berkeley, Cal.).*

**Fry, Thornton C.: The  $X^2$ -test of significance.** J. Amer. Statist. Assoc. 33, 513—525 (1938).

This is a careful and clear exposition, especially useful for students, of the mathematical theory of Pearson's  $\chi^2$ -test. The accompanying discussion of the meaning and proper application of this test will also be very useful to those whose understanding is lacking on this point.

*C. C. Craig (Ann Arbor).*

**Cochran, W. G.: The omission or addition of an independent variate in multiple linear regression.** J. Roy. Statist. Soc., Suppl., 5, 171—176 (1938).

Verf. untersucht (vgl. R. A. Fisher: Statistical Methods for Research Workers, 6th ed. 1936, § 29) die Änderungen, die ein vorgelegtes System von Regressionsgleichungen erleidet, wenn in dem System einige der zufälligen Variablen (variates) vernachlässigt werden bzw. wenn das System durch Zufügung von neuen zufälligen Variablen erweitert wird. — Numerisches Beispiel.

*W. Simonsen (Kopenhagen).*

● **Marbe, Karl: Das Ausgleichsprinzip in der Statistik und verwandte Probleme.** München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandl. 1938. 164 S. RM. 8.—.

Verf. untersucht ein zahlreiches statistisches Material betreffend Geburten, Roulettespiel usw., um mehrere Feststellungen zu machen und hervorzuheben, daß sie den wahrscheinlichkeitstheoretischen Voraussichten „widersprechen“ und so die von ihm verteidigte „empirische Theorie des Ausgleichsprinzips“ rechtfertigen. In einer statistischen Reihe soll nach dieser Theorie die Stabilität der relativen Häufigkeiten größer und die Regellosigkeit der Anordnung hingegen kleiner sein, als es die klassische Theorie glauben ließe; insbesondere sollen lange Iterationen (Gruppen von mehreren aufeinanderfolgenden gleichen Elementen) seltener sein, als dies bei den üblichen Voraussetzungen und Auffassungen zu erwarten wäre.

*Bruno de Finetti.*

**Deming, W. Edwards: Some thoughts on curve fitting and the chi test.** J. Amer. Statist. Assoc. 33, 543—551 (1938).

### **Physikalische Statistik:**

**Husimi, Kôdi: On the central limit theorem of statistical mechanics.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 19, 1105—1112 (1937).

Verf. untersucht das asymptotische Verhalten des Phasenvolumens eines aus  $n$  unabhängigen Grundsystemen (basic systems) bestehenden Systems. Es handelt sich um die Übertragung der Darwin-Fowlerschen Methode auf Fälle, wo die Energiewerte nicht ganzzahlige Vielfache einer bestimmten Zahl sind, so daß die sog. „distribution function“ (welche den charakteristischen Funktionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung entspricht) statt einer Potenzreihe eine Dirichletreihe ist. Analytisch dreht es sich

um iterierte Faltungen einer unbeschränkten monotonen Funktion, die mit Hilfe der „distribution function“ und einer Umkehrungsformel von Burkill behandelt werden. Zugrunde gelegt werden „modified micro canonical ensembles“, d. h. Gesamtheiten, bei denen jede Komponente eine Gesamtenergie  $\leq \eta$  besitzt. — Gelegentlich wird eine analytische Schwierigkeit durch physikalische Betrachtungen behoben. *Feller*.

**Husimi, Kôdi:** Supplementary notes on the central limit theorem of statistical mechanics. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 377—390 (1938).

Die Arbeit enthält formale Ergänzungen und Verbesserungen zu einigen Punkten einer früheren Arbeit (vgl. vorst. Referat; Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 19, 1105) und diskutiert von ihrem Standpunkt aus eingehend den im Titel genannten Satz.

*W. Feller* (Stockholm).

**Husimi, Kôdi:** The phase integrals and thermodynamics. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 757—769 (1938).

Die thermodynamischen Eigenschaften eines Systems sind bekanntlich durch das Plancksche thermodynamische Potential  $\psi$  als Funktion von  $V$  und  $T$  eindeutig bestimmt. Die statistische Mechanik führt  $\psi$  auf eine Funktion  $f(\beta)$  vermöge der Relationen  $\psi = \log f(\beta)$ ,  $f(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta \epsilon} d\jmath(\epsilon)$ ,  $\beta = \frac{1}{T}$  zurück. Aus der Tatsache, daß es thermodynamische Gleichgewichte gibt, kann geschlossen werden, daß stets  $\frac{d^2 \psi}{d\beta^2} > 0$  gelten muß oder daß  $f$  logarithmisch konvex ist. Nun gilt, daß jede Funktion  $f$ , die durch ein Laplaceintegral der oben angegebenen Form mit nicht abnehmendem  $\jmath$  definiert ist, sicherlich logarithmisch konvex sein muß. Umgekehrt kann jedoch aus der Existenz der letzteren Tatsache noch nicht geschlossen werden, daß sich  $f$  durch ein Laplaceintegral darstellen lassen muß, da gemäß dem Theorem von Bernstein-Widder hierzu die vollkommene Monotonie von  $f$  notwendig ist. Es ist also nicht möglich, die statistische Mechanik auf rein phänomenologisch-thermodynamischer Basis willkürfrei aufzubauen, doch läßt sich eine asymptotische Äquivalenz dieser Art begründen, die im wesentlichen mit der Gibbsschen statistischen Mechanik identisch ist.

*Fürth* (Prag).

**Hostinský, Bohuslav:** Sur une équation générale de la mécanique statistique. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 522—524 (1938).

Es wird der Zustand eines Gases in einem geschlossenen Raum betrachtet und vorausgesetzt, daß in dem Phasenraum eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $F(P_0, P, t_0, t)$  wohldefiniert ist dafür, daß sich der Phasenpunkt zur Zeit  $t$  in  $P$  befindet, falls er zur Zeit  $t_0 < t$   $P_0$  passierte. Es wird untersucht, wie diese Funktion mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit dafür zusammenhängt, daß der Phasenpunkt von  $P_0$  nach  $P$  gelangt ist, ohne die Wand zu treffen. Die erhaltene Gleichung, die ein Analogon zur Chapman-Kolmogoroffschen Gleichung ist, wird durch sukzessive Approximationen gelöst.

*W. Feller* (Stockholm).

**Born, Max, and Klaus Fuchs:** The statistical mechanics of condensing systems. Proc. roy. Soc. Lond., A 166, 391—414 (1938).

Es werden zunächst die bereits in einer früheren Arbeit von M. Born abgeleiteten Entwicklungen wiederholt, über deren wesentlichste Ergebnisse bereits (dies. Zbl. 17, 413) berichtet wurde. Als neues Ergebnis kommt hiezu die exakte mathematische Formulierung der von J. E. Meyer entdeckten Tatsache, daß die Erscheinung der Kondensation der Gase mit den Singularitäten gewisser Potenzreihen zusammenhängt, die die thermodynamischen Eigenschaften des Systems bestimmen. Die Bedingung für die Regularität dieser Potenzreihen läßt sich durch Einführung der Funktionen

$G_\lambda(\xi; x_1, x_2, \dots) \equiv G_\lambda(\xi, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \xi^\nu \nu^\lambda$  ausdrücken durch die Forderung, daß hiezu

notwendig und hinreichend die Bedingungen:  $G_\lambda(z, vb)$  regulär und  $G_\lambda(z, vb) \neq 1$  sind. Der volumenabhängige Bestandteil  $Q_\nu$  des Phasenintegrals  $Q$  läßt sich ferner



im Grenzfall sehr großer Moleküllzahlen  $N$  wie folgt ausdrücken:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{Q_{v,N}}{N} = G_0(Z, vb) - \ln Z,$$

worin  $Z$  der Konvergenzradius der erwähnten Potenzreihen ist. Hat demnach die Gleichung  $G_1(z, vb) = 1$  innerhalb des Regularitätsbereiches der  $G_1$  eine Lösung, dann ist sie gleich  $Z$ ; ist dies nicht der Fall, dann hat man für  $Z$  den absolut kleinsten singulären Wert  $\bar{Z}$  von  $G_1(z, vb)$  einzusetzen. Der erste Fall ist sicher für genügend große Volumina  $v$  realisiert. Das System verhält sich dann wie ein Gas, das der in der oben erwähnten Arbeit abgeleiteten Zustandsgleichung genügt. Im zweiten Fall, also wenn  $v$  kleiner ist als ein gewisses  $v_s$ , wird, da  $\bar{Z}$  von  $v$  unabhängig ist, der Druck  $P$  des Gases von  $v$  unabhängig: das System verhält sich wie ein gesättigter Dampf. Auch die Existenz von Tripelpunkten und eines kritischen Punktes läßt sich auf diese Weise mit den mathematischen Eigenschaften der erwähnten Funktionen in Zusammenhang bringen. Fürth (Prag).

**Donder, Th. de:** *Théorie nouvelle de la mécanique statistique.* Acad. roy. Belg., Cl. Sci., Mem., Coll. in 8° 17, Fasc. 5, 1—83 (1938).

Durch Einführung einer mikroskopischen Entropie, Temperatur usw. wird eine neuartige Darstellung der thermodynamischen Statistik gegeben, die mit der Gibbs'schen Statistik verglichen und auf verschiedene Spezialfälle angewandt wird. *Klein.*

**Lichtenstein, Roland:** *Die Geschwindigkeitsverteilung elastisch stoßender Elektronen in einem Gas, dessen Moleküle ihre Temperaturbewegung ausführen.* Physik. Z. 39, 646—656 (1938).

Es wird die Geschwindigkeitsverteilung von elastisch stoßenden Elektronen in einem Gas unter Berücksichtigung der Temperaturbewegung der Moleküle und eines auf die Elektronen wirkenden homogenen elektrischen Feldes berechnet. Das Problem führt auf Integrodifferentialgleichungen, die in ein System von Differentialgleichungen verwandelt werden. O. Klein (Stockholm).

## Geometrie.

### Analytische und algebraische Geometrie:

**Tang, Tsao-Chen:** *The nine circle theorem and the enlarged geometry.* Amer. Math. Monthly 45, 430—433 (1938).

An "enlarged" point is an oriented circle, obtained from an ordinary point by a Laguerre inversion; an "enlarged" line is a pair of oriented lines, an "enlarged" circle is a pair of oriented circles. The nine circle theorem can be stated in the following form: The three enlarged perpendiculars from the enlarged vertices of an enlarged triangle to the enlarged sides have an enlarged point in common, etc. O. Bottema.

**Kollros, Louis:** *Quelques théorèmes de géométrie.* Comment. math. helv. 11, 37—48 (1938).

L'auteur démontre quelques théorèmes que Steiner a énoncés sans démonstration. 1. Le lieu des points dont les puissances par rapport aux deux cercles ont un rapport constant. L'enveloppe des droites coupant harmoniquement deux coniques. 2. L'enveloppe des droites qui coupent deux cercles suivant des cordes dont le rapport est constant. 3. On donne deux cercles  $C$  et  $c$  et trace un cercle  $i_1$  tangent à  $C$  et  $c$ , puis un cercle  $i_2$  tangent à  $C$ ,  $c$  et  $i_1$ , etc. Quand on trouve un cercle  $i_n$  tangent à  $i_1$ , la chaîne se fermera toujours, quel que soit le cercle initial  $i_1$ . Relation entre  $R$ ,  $r$  et  $d$ . L'auteur considère le cas de deux cercles concentriques et démontre le théorème général par une inversion. Chaînes de sphères. 4. Coniques bitangentes à deux cercles. 5. Quadriques circonscrites à deux sphères; la congruence des tangentes à deux sphères.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Weiss, E. A.: Oktaven, Engelscher Komplex, Trialitätsprinzip. *Math. Z.* **44**, 580—611 (1938).

Der Verf. beginnt mit der Definition des bereits von Cayley herrührenden nicht-assoziativen Systems der sog. Oktaven als Paaren von Quaternionen  $(\alpha, \beta)$ . Zu der Oktave  $\tilde{A} = (\alpha, \beta)$  wird dann  $\tilde{A} = (\tilde{\alpha}, -\beta)$  als Konjugierte eingeführt, wobei  $\tilde{\alpha}$  die zu  $\alpha$  konjugierte Quaternion ist. Die Norm  $NA = AA$  ist dann eine gewöhnliche Zahl und Quadratsumme der 8 Komponenten der Oktave. Deutet man diese Komponenten als homogene Koordinaten eines projektiven  $R_7$ , so liegen die Bilder aller Oktaven mit  $NA = 0$  auf einer Quadrik  $\Omega$ . Auf  $\Omega$  gibt es 2 Scharen von  $R_3$ , die in Oktaven durch  $NA = 0$ ,  $AX = 0$  bzw.  $XA = 0$  dargestellt werden, wie bereits von Vaney (Thèse, Paris 1929) bemerkt wurde. Das für  $\Omega$  nach Study-Cartan geltende sog. Trialitätsprinzip, wonach ein nur aus Inzidenzbeziehungen bestehender Satz über Punkte, Räume 1. und 2. Art richtig bleibt bei beliebiger Vertauschung dieser 3 Begriffe, ergibt sich dann sofort, wenn man Inzidenz in richtiger Weise als vereinigte Lage oder speziellen Schnitt definiert und in die Oktavensymbolik übersetzt. Die Trialität wird dann im einzelnen untersucht, wobei sich z. B. als Bild eines Kegelschnitts eine Segresche  $M_4^1$  von  $\infty^1 R_3$  ergibt. Durch Schnitt von  $\Omega$  mit einem  $R_6$  und Anwendung des Trialitätsprinzips ergibt sich weiter eine von Engel herrührende Abbildung der Ebenen der Quadrik des  $R_6$  auf die Punkte von  $\Omega$ , in Analogie zu der bekannten Abbildung der Liniengeometrie. In den beiden Schlußparagrafen werden dann die Typen involutorischer Trialitäten angegeben und eine Beziehung zu einer früheren Arbeit des Verf. [Weiß, *Mh. Math. Phys.* **39**, 385—394 (1932); dies *Zbl.* **5**, 260] hergestellt, wo die Punktreihen eines linearen Komplexes des  $R_3$  auf die Punkte der Quadrik  $\Omega$  im  $R_7$  abgebildet wurden. Burau (Hamburg).

Strubecker, Karl: Zur Theorie der zirkularen quadratischen Komplexe. *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, IIa **147**, 37—47 (1938).

Ein quadratischer Strahlkomplex heißt zirkular, wenn er zwei Strahlbündel enthält, deren Scheitel  $I_1, I_2$  absolute Punkte einer Ebene  $\pi$  sind. Es gibt — wie Verf. bereits früher bewiesen hat (dies. *Zbl.* **17**, 29) — acht wesentlich verschiedene Typen solcher Komplexe, darunter Hirstsche Komplexe und drei Typen von Grenzfällen derselben. Für diese vier Typen wird nun eine gemeinsame einfache Erzeugungsweise der Komplexkegel und Komplexkurven angegeben. Um z. B. den Komplexkegel eines Raumpunktes zu erhalten, hat man aus einem leicht angebbaren Büschel von Kegeln 2. Ord. jenen herauszugreifen, für den  $\pi$  eine zyklische Ebene ist. Damit ergeben sich teilweise neue Einblicke in die Struktur dieser Komplexe. J. L. Krames.

Pimiä, L.: Über projektive Vielseite dritter Ordnung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A* **51**, Nr 5, 1—17 (1938).

Ein ebenes Vielseit  $v$  heiße regulär, wenn keine zwei benachbarten Seiten von  $v$  in der gleichen Geraden liegen; unter einer Spitze von  $v$  wird ein Eckpunkt verstanden, von dessen anliegenden Seiten die eine in der anderen enthalten ist. Es wird u. a. gezeigt: Ein Vielseit 3. Ordnung mit Spitze besitzt genau eine Inflexionsseite (ein reguläres einfaches Vielseit 3. Ordnung besitzt genau drei Inflexionsseiten). Ein reguläres Vielseit 3. Ordnung mit Doppelpunkt besitzt — je nach der Art des Doppelpunktes — entweder drei oder eine Inflexionsseite. Die Klasse bzw. der Klassenindex eines einfachen regulären Vielseites  $v$  von 3. Ordnung ist entweder sechs oder vier bzw. zwei oder null; im letzteren Falle gehen durch jeden Punkt im Inneren bzw. Äußeren des Inflexionsdreieckes von  $v$  keine bzw. mindestens zwei Tangenten von  $v$ . Entsprechende Sätze für reguläre Vielseite 3. Ordnung mit Doppelpunkt; im Falle eine Spitze vorhanden, ist die Klasse bzw. der Klassenindex vier bzw. zwei. Jedes zusammengesetzte Vielseit 3. Ordnung ist Summe aus einem einfachen regulären Vielseit  $v$  von 3. Ordnung und vom Klassenindex null sowie aus einem regulären, im Inflexionsdreieck von  $v$  gelegenen Vielseit 2. Ordnung. Haupt (Erlangen).



**Steck, Max:** Zur Theorie der reellen Inzidenzabbildungen. II. Die Gruppe der Inzidenzabbildungen von  $S(n^2 - n + 1/2n)$ .  $G_{168}$  von  $S(7/2/3)$  und ihre zyklischen Untergruppen. Die Inzidenzabbildungen der Vierecksgeometrie  $S(13/2/4)$ . J. reine angew. Math. 179, 148—192 (1938).

A study of the groups of "real incidence mappings" in finite projective planes, begun in a recent paper by the author (this Zbl. 19, 133), is continued. For the group in the plane with seven points (three on each line) the cyclic subgroups generated by elements of each geometric type are enumerated. A detailed derivation of the group for the plane with thirteen points (four on each line) is given. This group contains no members having just three fixed points; a transformation without a fixed point has no fixed line and each transformation with a single fixed point has a single fixed line. Further discussion of the cyclic subgroups of this group is to follow as well as a discussion of the characterization of a finite projective plane by purely geometric methods.

J. L. Dorroh (Arkadelphia).

**Spyropoulos, Georg:**  $R^n$ -Komplexe, die  $V^{(n+1)^2}$  und ihre Tangentialräume. Bull. Soc. Math. Grèce 19, 39—43 (1938).

Verf. versucht, einige Aussagen einfacher Art zur Geometrie der  $R_n$  im  $R_{2n+1}$  zu geben, d. h. der Graßmannschen Mannigfaltigkeit  $G(n, 2n+1)$ , die eine  $M_{(n+1)^2}$  im  $R_{(2n+2)-1}$  ist. Leider sind die Behauptungen dabei zum größten Teil unrichtig auf Grund falscher Abzählungen der in Frage kommenden Grade und Dimensionen. *Bureau*.

**Thalberg, Olaf M.:** Involutions connected with cuspidal cubics. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 1938, 1—9 (Nr 6).

Noch einige ebene Involutionen, die mit einem Büschel rationaler  $C^3$  verbunden sind (dies. Zbl. 14, 131; 16, 321). Die  $C^3$  des Büschels besitzen alle eine Spitze  $S_0$  und in  $S_0$  eine gemeinsame Spitztangente  $l$ ; sie haben weiter drei einfache Punkte  $S_1, S_2, S_3$  gemein; zwei Punkte  $P, Q$  werden als entsprechend bezeichnet, wenn sie auf derselben Kurve  $a$  des Büschels liegen und wenn die Gerade  $PQ$  durch den weiteren Schnittpunkt  $R$  der Kurve  $a$  mit einer festen  $S_0$  enthaltenden Gerade  $r$  hindurchgeht. Die Involution hat die Klasse 1 und die Ordnung 5. Ersetzt man  $r$  mit einem durch  $S_0 S_1 S_2 S_3$  hindurchgehenden Kegelschnitt, so erhält man eine andere Involution der Klasse 2 und der Ordnung 5. Allgemeiner, könnte man als Ort der Punkte  $R$  eine Kurve einer beliebigen Ordnung  $v$  wählen, die in  $S_0$  einen geeigneten  $(v-1)$ -fachen Punkt besitzt und durch  $S_1 S_2 S_3$  hindurchgeht.

E. G. Togliatti (Genova).

**Derwidge, L.:** Sur les surfaces fondamentales des transformations birationnelles de l'espace à quatre dimensions. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 24, 566—572 (1938).

**Brown, L. M.:** A family of quadrics. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 5, 207—210 (1938).

A description of the variety common to three quadrics in space of  $2n+1$  dimensions which contain three  $S_n$ 's in general position. This variety is the familiar variety composed of the transversal lines of the given  $S_n$ 's. *J. A. Todd* (Cambridge).

**Hollerott, Temple Rice:** Singularities and contacts in a linear system and its linear sub-systems. Rend. Circ. mat. Palermo 61, 111—121 (1937).

An investigation of the loci of singularities and contacts of a web of surfaces and of the linear systems contained in the web. The author concludes that the locus of singular points of surfaces of the web contains the locus of singular points of the same type of surfaces of linear systems contained in the web, but that the locus of points of contact of surfaces of the web does not contain the loci of points of contact of surface of linear subsystems of the web.

J. A. Todd (Cambridge).

**Beth, H. J. E.:** Die Bewegungen eines festen Körpers, welche in der Studyschen Abbildung mit algebraischen Kurven korrespondieren. Christ. Huygens Internat. Math. Tijdschr. 16, H. 6, 226—272 (1938) [Holländisch].

Durch eine von Study herrührende Abbildung werden die  $\infty^6$  Lagen eines festen

Körpers den Punkten eines  $V_6^2$  in  $R_7$  zugeordnet. Die  $V_6^2$  hat die Gleichung  $\sum \alpha_i \beta_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). In ihr liegt der  ${}^\beta R_3$  mit den Gleichungen  $\alpha_i = 0$ ; den Punkten dieses Raumes sind keine Lagen, nur „Translationsmöglichkeiten“ zugeordnet. Mit einer Kurve in  $V$  korrespondiert eine Bewegung in  $R_3$ . Verf. untersucht ausführlich die Eigenschaften derjenigen Bewegungen, welche mit algebraischen Bildkurven korrespondieren. So korrespondiert mit einer Geraden in  $V$ , welche einen bzw. keinen Punkt mit  ${}^\beta R_3$  gemein hat, eine geradlinige Translation bzw. die Rotation um eine feste Achse. Die Bahnkurven der Bewegung sind algebraisch; hat die Bildkurve die Ordnung  $n$ , so haben die Bahnkurven im allgemeinen die Ordnung  $2n$ . Untersuchung der mehrfachen Punkte der Bahnkurven. Mit einer Bildkurve in einem  $R_3$  von  $V$ , welcher keinen bzw. einen Punkt bzw. eine Gerade von  ${}^\beta R_3$  enthält, korrespondiert eine sphärische bzw. eine symmetrische bzw. eine ebene Bewegung. Untersuchungen über die Bewegungen, welche mit einer Bildkurve in einer nicht in  $V$  gelegenen Ebene, in einem nicht in  $V$  enthaltenen  $R_3$  oder in höheren Räumen korrespondieren.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

**Conforto, Fabio:** Sopra la bisezione della serie canonica su di una curva di genere quattro. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 2, 216—223 (1938).

Das Problem der Halbierung der kanonischen Schar  $g_3^2$  einer algebraischen Kurve  $C$  vom Geschlechte 4 besteht in der Aufsuchung von dreipunktigen Gruppen, die, doppelt genommen, je eine kanonische Gruppe liefern. Hat  $C$  allgemeine Moduln, so gibt es auf ihr 120 solche halbkanonische Gruppen; trägt aber  $C = C_0$  eine  $g_3^1$ , die ihr eigener Rest bezüglich der  $g_3^2$  ist, so ist jede Gruppe dieser Schar halbkanonisch und deren Anzahl ist  $\infty^1$ . Bildet man  $C$  birational auf eine kanonische  $C_6$  des  $S_3$  ab, so tritt der letzte Fall ein, wenn die  $C_6$  Schnitt eines quadratischen Kegels mit einer kubischen Fläche ist; die Berührungspunkte jeder dreifach berührenden Tangentialebene von  $C_6$  liefern eine halbkanonische Gruppe, und zu jenen Ebenen gehören insbesondere sämtliche Berührungsebenen des Kegels. Verf. beweist nun, daß auch auf der  $C_0$  genau 120 isolierte halbkanonische Gruppen liegen; zu ihnen treten die  $\infty^1$  Gruppen der  $g_3^1$  neu hinzu. Die Beweismethode besteht in der stetigen Überführung von  $C_0$  in eine hyperelliptische Kurve  $C_1$ ; die auf dieser liegende  $g_2^2$  hat 10 Doppelpunkte, die, zu je dreien genommen, alle isolierten halbkanonischen Gruppen der  $C_1$  liefern. Bei diesem Übergang geht jede isolierte halbkanonische Gruppe der  $C_0$  in eine ebensolche der  $C_1$  über, während die Gruppen der  $g_3^1$  in diejenigen der  $g_2^2$ , vermehrt um einen ihrer 10 Doppelpunkte, ausarten.

Harald Geppert (Gießen).

**Emch, Arnold:** Über eine besondere Klasse von involutorischen Cremona-Transformationen und die darin invarianten algebraischen Kurven. Comment. math. helv. 11, 26—32 (1938).

Im  $S_2$  ordne die involutorische quadratische Transformation  $T_2$  dem Punkte  $P_1(a_1, a_2, a_3)$  den Punkt  $P'_1(a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2)$  zu; dann entsprechen sich auch  $P_2(a_2 a_3, a_2, a_3)$  und  $P'_2(a_1, a_3 a_1, a_1 a_2)$  und die weiteren zwei durch analoge Vertauschungen der Koordinaten entstehenden Paare. Ziel der Arbeit ist die Untersuchung der Konfiguration dieser acht Punkte; letztere liegen paarweise auf vier Geraden durch jeden der drei Fundamentalpunkte der  $T_2$ , und die vier Geraden  $P_i P'_i$  treffen sich in einem Punkte. Auf jeder zur  $T_2$  invarianten  $C_3$  liegen  $\infty^1$  solche Konfigurationen, deren jede durch ein mit dem isologen Punkt von  $C_3$  auf einer Geraden liegendes Punktepaar  $P_i P'_i$  der Kurve bestimmt wird. — Im  $S_3$  ordne die kubische involutorische Abbildung  $T_3$  die Punkte

$$P_1(a_1, a_2, a_3, a_4) \quad \text{und} \quad P'_1(a_2 a_3 a_4; a_1 a_3 a_4; a_1 a_2 a_4; a_1 a_2 a_3)$$

zu; dann entsprechen sich auch die weiteren sieben Paare  $P_i, P'_i$ , die nach obigem Muster aus  $P_i P'_i$  entstehen. Diese 16 Punkte liegen paarweise auf acht Geraden durch jeden der vier Fundamentalpunkte, und die Geraden  $P_i P'_i$  schneiden sich wieder in einem Punkte. Auf jedem Kegel des zu  $T_3$  gehörigen kubischen Komplexes der



Verbindungsgeraden entsprechender Punkte liegt eine zu  $T_3$  invariante  $C_7$  vom Geschlecht 3, auf der  $\infty^1$  der besprochenen 16-punktigen Konfigurationen liegen.

*Harald Geppert* (Gießen).

**Gröbner, Wolfgang:** Severis Begründung der algebraischen Geometrie mittels des „Metodo rapido“. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 340—353 (1938).

Die Arbeit gibt ein Referat über die von F. Severi (Trattato di geometria algebrica I<sub>1</sub>, Bologna 1926) angewandte Methode, um in der geometrischen Theorie der algebraischen Kurven möglichst rasch zum Riemann-Rochschen Satz vorzustoßen, wobei Verf. besonderen Wert auf die anschauliche Erfassung der Gedankengänge legt. Neu ist ein einfacher Beweis des Satzes, daß die Vollscharen  $g_n^{n-p}$  genügend hoher Ordnung  $n$  auf  $C$ , stets von zu  $C$ , adjungierten Kurven ausgeschnitten werden; er beruht darauf, daß die Kurven  $l$ -ter Ordnung, die auf  $C$ , die  $g_n^{n-p}$  ausschneiden, durch  $lv - n$  feste Punkte der  $C$ , gehen müssen, die ihnen aber nur  $lv - n - d$  unabhängige Bedingungen auferlegen, wenn  $d$  die Zahl der Doppelpunkte von  $C$ , ist, woraus folgt daß sie auch durch die  $d$  Doppelpunkte laufen müssen.

*Harald Geppert*.

**Gröbner, Wolfgang:** Algebraische Geometrie auf vektorieller Grundlage. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 12, 354—368 (1938).

Die Arbeit gibt eine neue Methode der algebraischen Darstellung von Linearscharen auf einer Kurve  $C$ . Liegt  $C$  etwa in der Ebene, so kann man jeden Punkt  $P$  durch den Vektor  $\mathfrak{x} = \{x_1, x_2\}$  kennzeichnen; führt man zwischen zwei gleichartigen Vektoren den Begriff der Summe  $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2\}$  und des algebraischen Vektorproduktes  $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \{x_1y_1 + y_1x_1, x_1y_2 + y_1x_2, x_2y_2 + y_2x_2\}$  und der analog zu definierenden Produkte  $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$  usw. ein, so kann man für die Vektoren  $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ , die zu den  $n$  Punkten einer Gruppe aus einer Linearschar  $g_n^r$  auf  $C$  gehören, die elementarsymmetrischen Vektoren  $\mathfrak{s}_1 = \sum \mathfrak{x}_i$ ,  $\mathfrak{s}_2 = \sum \sum \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k$ ,  $\dots$  bilden; sie hängen rational von den  $r$  linearen Parametern  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  der  $g_n^r$  ab. Jede Gruppe der  $g_n^r$  besteht aus den  $n$  Wurzeln der Gleichung  $f(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{x}^n - \mathfrak{s}_1 \mathfrak{x}^{n-1} + \dots + (-1)^n \mathfrak{s}_n = 0$  für ein bestimmtes Wertesystem der  $\lambda_1 \dots \lambda_r$ . Am Beispiel der  $g_3^1$  auf einer elliptischen Kurve wird diese elegante Darstellung durchgerechnet. — Die Vektordarstellung eignet sich auch zur Behandlung birationaler Transformationen; z. B. ist jede ebene Affinität durch eine ganze lineare Substitution des variablen Punktvektors  $\mathfrak{x}$ , nämlich  $\bar{\mathfrak{x}} = (\lambda \mathfrak{b}(\bar{\mathfrak{c}} - \mathfrak{c}) + \bar{\mathfrak{c}}\mathfrak{x})/\mathfrak{c}$  ausdrückbar, worin  $\mathfrak{c}, \bar{\mathfrak{c}}$  die Vektoren zweier gegebener entsprechender Punkte,  $\mathfrak{b}$  ein Vektor auf der Affinitätsachse sind und der Parameter  $\lambda$  so bestimmt werden muß, daß die geforderte algebraische Vektordivision auf der rechten Seite ausführbar wird. Jede Kollineation, aber auch jede quadratische und mithin jede Cremona-Abbildung der Ebene ist durch eine linear-gebrochene Substitution in  $\mathfrak{x}$  darstellbar; eigentlich findet erst in dieser Darstellung die Eineindeutigkeit der Abbildung ihren sinnfälligen Ausdruck.

*Harald Geppert* (Gießen).

**Finsler, Paul:** Über Freisysteme (lineare Freigebilde). Comment. math. helv. 11, 62—76 (1938).

Ein algebraisches Gebilde im projektiven Raum heißt Freigebilde, wenn es von jedem linearen Raum entweder in unendlich vielen Punkten oder in endlich vielen linear unabhängigen Punkten getroffen wird (vgl. Finsler, dies. Zbl. 16, 221). In dieser Arbeit werden alle Freigebilde des  $n$ -dimensionalen Raumes, die aus endlich vielen linearen Räumen zusammengesetzt sind, aufgestellt.

*van der Wuerden*.

**Feld, J. M.:** On certain groups of birational contact transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 529—538 (1938).

Die  $\infty^1$  Berührungstransformationen der Ebene, die jeden Punkt in eine triangulärsymmetrische Kurve i. B. auf das Fundamentaldreieck überführen, sind birational und lassen die Schar aller  $\infty^3$  triangulärsymmetrischen Kurven invariant. Sie bilden eine Gruppe von vertauschbaren Transformationen. Es werden noch andere birationale Berührungstransformationen besprochen, und alles das wird auf den  $R_n$  übertragen. Auch invariante Scharen von  $W$ -Kurven treten auf. Der Verf. sollte Lies Abhandlung

über die Reziprozitätsverhältnisse des Reyeschen Komplexes (1870) beachten: Ges. Abh. Bd. I, Abh. V. Engel (Gießen).

### Differentialgeometrie:

Wittig, Felix: **Natürliche Gleichungen verallgemeinerter Rollkurven.** Deutsche Math. 3, 515—528 (1938).

Ist die ebene Transformationsgruppe  $G$  transitiv in bezug auf die Elemente  $(r-2)$ -ter Ordnung, so kann man eine gegen  $G$  invariante „Bogenlänge“  $s$  und eine Differentialinvariante  $t$  — eine Verallgemeinerung der Krümmung — definieren. Natürliche Gleichung ist dann die Beziehung zwischen  $s$  und  $t$ . Abrollen einer Kurve auf einer anderen findet statt, wenn die Elemente  $(r-2)$ -ter Ordnung stets zusammenfallen und die aufeinanderliegenden Punkte stets um gleiche „Bogenlängen“ von den ursprünglich aufeinanderliegenden Punkten entfernt sind. Jeder Punkt der „bewegten“ Ebene beschreibt eine Rollkurve. Rollen insbesondere zwei Kurven  $t = \text{konst.}$  aufeinander, so erhält man Verallgemeinerungen der Zykloide, Epizykloide usw. In der Arbeit werden für einige weniggliedrige Gruppen die natürlichen Gleichungen dieser Zykloiden angegeben (z. B.  $p, q, xp + 2yq$ ). Lochs (Kennelbach).

Alt, Wilhelm: **Die Liouvilleschen Kurvensysteme und die rhombisch-geodätischen Netze.** Würzburg: Diss. 1938. 29 S.

Rhombische Netze von geodätischen Linien sind nur auf einer Liouville- ( $L$ -) Fläche möglich, und die Diagonalkurven eines solchen Netzes bilden ein  $L$ -Netz auf der Fläche  $F$ , bei dessen Einführung als Parameternetz das Linienelement von  $F$  die Form  $ds^2 = (\Phi(\xi) + \Psi(\eta))(d\xi^2 + d\eta^2)$  annimmt. Ist umgekehrt ein  $L$ -Netz  $\xi, \eta$  bekannt, so sind die einzigen rhombisch-geodätischen Netze, die jenes zu Diagonalkurven haben, durch die Formeln

$$\int (\Phi(\xi) + c)^{-1/2} d\xi \pm \int (\Psi(\eta) - c)^{-1/2} d\eta = u \text{ bzw. } v$$

gegeben. Zu den  $L$ -Flächen gehören speziell die Flächen zweiter Ordnung; ist das Gaußsche Krümmungsmaß  $K$  nicht konstant, so tragen diese Flächen nur ein  $L$ -Netz, nämlich das der Krümmungslinien, wie Verf. unter Heranziehung der Darbouxschen Funktionalgleichung beweist; man kennt also auch ihre rhombisch-geodätischen Netze. Ergebnis: Bei Ausschluß von Drehflächen und positivem  $K$  bilden zwei Scharen geodätischer Linien ein rhombisches Netz, wenn sie entweder identisch sind und zwei kongruente Krümmungslinien umhüllen oder zwei verschiedene Büschel mit Nabelpunkten als Trägern bilden; für  $K < 0$  ist die zweite Möglichkeit durch ein einfaches Schnittgesetz mit den Hauptebenenschnitten von  $F$  zu ersetzen; ist  $F$  Drehfläche mit  $K \neq 0$ , so sind entweder die beiden Scharen identisch und umhüllen zwei kongruente oder einen Parallelkreis oder sie sind verschieden und treffen den Kehlkreis unter gleichem Winkel.

Harald Geppert (Gießen).

Narasinga Rao, A.: **Studies in turbine geometry. I. The concepts of turbine geometry.** J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 96—108 (1938).

Verschiebt man alle Tangentialelemente einer Hyperkugel  $K$  des  $R_n$  in allen Tangentialrichtungen um die Entfernung  $t$ , so erhält man eine Gesamtheit von Flächenelementen, die Verf. eine Turbine nennt. Dieser Begriff ist für  $n=2$  im wesentlichen bereits von Kasner eingeführt worden. Die Punkte der Elemente einer Turbine erfüllen wieder eine zu  $K$  im Abstand  $t$  konzentrische Kugel  $C$ , von der aus die Flächenelemente unter einem Winkel  $\alpha$  ausgehen. Den Turbinen werden nun  $n+3$  homogene Koordinaten zugeordnet, zwischen denen eine quadratische Relation  $\Omega = 0$  besteht, wenn die Turbine für  $t=0$  in eine orientierte Sphäre entartet. Im  $R_{n+2}$  gibt es 2 ausgezeichnete Punkte derart, daß man durch Verbinden des einer Turbine zugeordneten Bildpunkts des  $R_{n+2}$  mit je einem dieser Punkte und Schnitt dieser 2 Geraden mit der Quadrik die Bilder der beiden der Turbine zugeordneten Sphären erhält. Die Gruppe der Turbinengeometrie ist die aller Projektivitäten des  $R_{n+2}$ , die  $\Omega = 0$  in sich überführen, d. h. die der Lietransformationen. Als wesentliche



Untergruppen sind hierin die Möbius- und Laguerregruppe enthalten, die sich als die Projektivitäten ergeben, die einen der obigen beiden Punkte außerdem noch festhalten. Es werden dann insbesondere Büschel von Turbinen betrachtet, die Geraden des  $R_{n+2}$  entsprechen, insbesondere die inneren und äußeren Büschel aller Turbinen mit derselben Innen- oder Außenkugel (= Geraden durch die beiden ausgezeichneten Punkte). Es ergeben sich mit Hilfe dieser beiden Büschelsorten 2 Systeme normierter Turbinenkoordinaten, die ebenfalls eingeführt werden.

Bureau (Hamburg).

Narasinga, Rao, A.: Studies in turbine geometry. II. On the sub-geometries of Lie which belong to the Möbius-Laguerre pencil. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 8, 179—186 (1938).

In der 1. Arbeit dieser Reihe hat der Verf. die Turbinengeometrie im  $R_n$  eingeführt als Deutung der Liegeometrie, die als Geometrie des  $R_{n+2}$  mit invarianter Quadrik  $\Omega = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = 0$  aufgefaßt werden kann. In dieser Arbeit werden nun diejenigen Transformationen betrachtet, die die Hyperebene  $E_k: k(x_0 + x_1) + x_{n+2} = 0$  fest lassen. Es ergibt sich dann eine bemerkenswerte Reihe von Untergeometrien  $\mathcal{G}_k$ , die für  $k=0$  die Möbius- und für  $k=\infty$  die Laguerregeometrie enthält. Für allgemeines  $k$  erweisen sich die  $k$ -Kugeln und sog. „ $k$ -Turbinen“ als ausgezeichnet, d. h. Kugeln vom Radius  $k$  und Turbinen, die eine solche als innere Kugel haben. Diese werden nämlich auf die Punkte der Hyperebene  $E_k$  abgebildet. Alle Begriffe der Turbinengeometrie lassen sich nun mit Hilfe von  $k$ -Kugeln und  $k$ -Turbinen ausdrücken, wie etwa eine allgemeine Kugel als Gesamtheit der durch sie halbierten  $k$ -Kugeln usf. Es wird die nichteuklidische Entfernung zweier Punkte des  $E_k$  als wesentliche Invariante der Geometrie  $\mathcal{G}_k$  gedeutet und als Bild der involutorischen Projektivitäten in  $E_k$  sog. „ $k$ -Inversionen“ als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Inversionen eingeführt. Zum Schluß wird ein Übertragungsprinzip angegeben, das vermittels einer Projektivität der entsprechenden Hyperebenen gestattet, Sätze der Möbiusgeometrie  $\mathcal{G}_0$  und einer Geometrie  $\mathcal{G}_k$  aufeinander abzubilden.

Bureau (Hamburg).

Davies, E. T.: On the deformation of the tangent  $m$ -plane of a  $V_n^m$ . Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 5, 202—206 (1938).

Let  $B^r_{(r,s)}(\nu, \lambda, \mu = 1, \dots, n; i, j, k = 1, \dots, m)$  be tangential vectors of a  $V_n^m$  in a  $V_n$ . Then applying  $D$  (see the abstract of Davies paper, the review below) to  $B^{r_1} \dots B^{r_m} = B^{r_1}_{[1} \dots B^{r_m]}_{m]$  one gets easily

$$D B^{r_1} \dots B^{r_m} = B^{r_1} \dots B^{r_m} (B^i_{\lambda} D B^{\lambda}_i) + \sum_{j=1}^m B^{r_1} \dots P^{r_j}_j \dots B^{r_m}_m$$

where

$$P^r_j = C^r_{\lambda} D B^{\lambda}_j, \quad C^r_{\lambda} = \delta^r_{\lambda} - B^r B^{\lambda}_i$$

and  $B^r B_{\lambda}$  is the unit tensor of  $V_n^m$ . The author applies this formula to the cases  $r=1, s=2, r=3, s=2$  and gets in this way the sufficient condition for a geodesic  $V_n^m$ , furthermore the formula for the deformation of the element of volume in the local tangential  $R_m$  and finally the angle between  $B^{r_1} \dots B^{r_m}$  and  $B^{r_1} \dots B^{r_m} + dt D B^{r_1} \dots B^{r_m}$ .

(The left hand member of (10) is to be written  $\sum_{i=1}^m \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ i k \end{smallmatrix} \right\} u^k$ .) Hlavatý (Praha).

Davies, E. T.: Analogues of the Frenet formulae determined by deformation operators. J. London Math. Soc. 13, 210—216 (1938).

Let  $D^{r,s}$  ( $r, s = 1, 2, 3$ ) be the symbol used by the referee in the abstract of Schouten-v. Kampen's paper (this Zbl. 8, 179). Then using the well known Schmidt method as well as the method by Juvet the author finds the analogues of the Frenet formulae

for a congruence with the tangential versor  $\hat{i}^v$

$$\begin{aligned} D_1^{r,s} \hat{i}^v &= a_{11} \hat{i}_1^v + a_{12} \hat{i}_2^v, \dots, & D_p^{r,s} \hat{i}^v &= a_{p1} \hat{i}_1^v + a_{p2} \hat{i}_2^v + \dots + a_{p,p+1} \hat{i}_{p+1}^v, \dots, \\ D_n^{r,s} \hat{i}^v &= a_{n1} \hat{i}_1^v + \dots + a_{nn} \hat{i}_n^v. \end{aligned}$$

If  $r = 1$ ,  $s = 2$  then (1) become the formulae of Frenet for the congruence in the direction  $v^v$ . If  $r = 3$  and  $s = 2$  then, following Dienes, one can prove that

$$\frac{\sin d\sigma}{dt} = a_{pp+1},$$

where  $d\sigma$  denotes the angle between the  $p$ -vectors  $\hat{i}_{[1] \dots [p]}$  and  $\bar{\hat{i}}_{[1] \dots [p]}$  where  $\bar{\hat{i}} = \hat{i} + dt D \hat{i}$ .

Hlavatý (Praha).

**Tzitzeica, Georges:** Sur certaines déformations d'ordre supérieur. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 707—708 (1938).

Im projektiven Raum von  $4p - 1$  Dimensionen sei  $(x)$  ein konjugiertes Netz mit gleichen Invarianten, dessen  $4p$ -te Laplacesche Transformierte  $(x_{4p})$  mit  $(x)$  identisch ist, dann liegen alle transformierten Netze außer  $(x)$  und  $(x_{2p})$  auf derselben quadratischen Mannigfaltigkeit  $Q$ . Jedem konjugierten Netz  $(x_i)$  außer  $(x_0)$  und  $(x_{2p})$  lassen sich im  $R_{2p-1}$  zwei Flächen  $(X_i)$  und  $(X'_i)$  zuordnen, die aufeinander bis zu einer gewissen Ordnung abwickelbar sind. Die Punkte  $X_i$  und  $X'_i$  führen zu zwei Polyedern  $P$  und  $P'$ , die gleiche Kanten haben, ohne daß sie zur Deckung gebracht werden können oder einander symmetrisch sind. Für  $p = 2$  erhält man im  $R_3$  die Oktaeder von Bricard.

W. Haack (Karlsruhe).

**Kawaguchi, Akitsugu:** Theory of connections in a Kawaguchi space of higher order. (Res. Inst. f. Geometry, Hokkaido Imp. Univ., Sapporo.) Proc. Imp. Acad. Jap. 13, 237—240 (1937).

The metric  $\int F(x, x', x'' \dots, x^{(m)}) dt$  being assumed invariant under any change of parameter  $t$ , the covariant differential of an arbitrary vector  $X^i$  may be defined as follows

$$\delta X^i = dX^i + \sum_{j,k}^{2m-2} I_{jk}^i X^j dx^{(k)}$$

where the  $I$ 's are found by the author as functions of  $F$  and its consecutive derivatives. The metric tensor which occurs in this investigation is defined by

$$g_{ij} = m F^{2m-1} F_{(m)i(m)j} + \mathfrak{E}_i^m \mathfrak{E}_j^m + \mathfrak{E}_i^1 \mathfrak{E}_j^1,$$

where the vectors  $\mathfrak{E}$  are derived from the Synge vectors  $\bar{E}_i^a$  ( $a = 0, \dots, m$ ).

Hlavatý (Praha).

### Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

**Blaschke, Wilhelm:** Einführung in die Integralgeometrie. Bull. Soc. Math. Grèce 19, 1—17 (1938) [Griechisch].

**Alexandroff, A.:** Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. IV.: Die gemischten Diskriminanten und die gemischten Volumina. Rec. math. Moscou, N. s. 3, 227—249 u. deutsch. Zusammenfassung 249—251 (1938) [Russisch].

Sind  $f_1, f_2, \dots, f_m$  quadratische Formen von  $n$  Variablen, so ist die Diskriminante der Form  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m$  ein homogenes Polynom  $n$ -ten Grades

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{1, \dots, m} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} D(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_n})$$

in den  $\lambda \mu$ . Hierbei seien die Koeffizienten so definiert, daß sie von der Reihenfolge der Argumente  $f$  unabhängig sind.  $D(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_n})$  wird dann die gemischte Diskriminante der Formen  $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_n}$  genannt. [Über den Zusammenhang dieser Begriffsbildung mit der Theorie der konvexen Körper vgl. Bonnesen-Fenchel,



Theorie der konvexen Körper. Erg. Math. 3, H. 1 (1934), insbes. S. 58—61.] Verf. beweist den folgenden, für  $n = 2$  schon von Weyl (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1917, 250—266) in diesem Zusammenhang herangezogenen Satz: Sind  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$  positiv definite quadratische Formen und  $g$  eine beliebige quadratische Form, so ist

$$D(f_1, \dots, f_{n-2}, f_{n-1}, g)^2 \geq D(f_1, \dots, f_{n-2}, f_{n-1}, f_{n-1}) D(f_1, \dots, f_{n-2}, g, g),$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn  $f_{n-1}$  und  $g$  proportional sind. Diese Ungleichung ist einer neuerdings (vgl. z. B. Teil II der Arbeit, dies. Zbl. 18, 276) bewiesenen für die gemischten Volumina analog, und für lauter positiv definite Formen kann hieraus wie für gemischte Volumina eine Reihe weiterer Ungleichungen hergeleitet werden. Auf Grund der Integraldarstellungen der gemischten Volumina „glatter“ Körper mit Hilfe von gemischten Diskriminanten (vgl. den genannten Bericht) läßt sich dann sehr leicht bestätigen, daß ein solcher Körper durch seine  $m$ -te Krümmungsfunktion für  $m > 1$  bis auf Translationen eindeutig bestimmt ist. Ferner wird der obige Satz dazu verwendet, um die erwähnte analoge Ungleichung zwischen gemischten Volumina auf dem von Hilbert für die Minkowskische Ungleichung angegebenen Wege zu beweisen. (Referiert nach dem deutschen Auszug.) (III. vgl. dies. Zbl. 18, 424.)

W. Fenchel (Kopenhagen).

Maccaferri, Eugenio: Applicazioni elementari del procedimento Borchardt-Minkowsky. Period. Mat., IV. s. 18, 171—176 (1938).

Ist  $V(\mu)$  das Volumen des Parallelkörpers im Abstand  $\mu \geq 0$  zu einem gegebenen (konvexen) Körper, so kann dessen Oberfläche  $S$  durch  $\lim(V(\mu) - V(0))/\mu$  für  $\mu \rightarrow 0$  definiert werden (nach Minkowski; Steiner hat 1840, also vor dem vom Verf. im Zusammenhang mit Borchardt angegebenen Jahr, Oberflächen auf diesem Wege berechnet). Der Verf. ersetzt z. B. im Fall eines Quaders mit den Kantenlängen  $a_1, a_2, a_3$  in der obigen Definition  $V(\mu)$  durch das Volumen des Quaders mit den Kanten  $a_i + 2\mu$ , was offenbar zulässig, und findet so  $S = d((a_1 + 2\mu)(a_2 + 2\mu)(a_3 + 2\mu))/d\mu$  für  $\mu = 0$ . Ähnlich wird auch bei anderen elementargeometrischen Körpern die Oberfläche aus einer Parameterdarstellung des Volumens der (Ersatz-) Parallelkörper durch Differentiation gewonnen.

Anton E. Mayer (Wien).

Rémès, E.: Sur quelques propriétés du plus petit domaine convexe contenant un ensemble de points donné et sur le problème de l'approximation minimum. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 115—129 (1938) [Ukrainisch].

Dans la première partie de l'article nous signalons (§ 2) quelques faits géométriques concernant les plus petit domaine convexe qui contient un ensemble de points donné, en apportant, en particulier, plus de précision dans l'énoncé de certaines propositions dues à Carathéodory et à Steinitz. Puis on applique (§ 3) les résultats des considérations précédentes à une discussion géométrique du théorème fondamental concernant le problème de l'approximation minimum pour les systèmes (infinis en général) d'équations incompatibles de la forme (1).

Autoreferat.

● Blumenthal, Leonard M.: Distance geometries. A study of the development of abstract metrics. With an introduction by Karl Menger. (Univ. of Missouri studies. Vol. 13, Nr. 2.) Columbia: Univ. of Missouri 1938. 145 pag.

Der vorliegende Bericht bespricht zunächst in einer historischen Einleitung diejenigen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie, deren Axiomensysteme (mit unserer heutigen Terminologie) sich auf dem undefinierten Begriff des Punktes und der einem Punktepaar zugeordneten Entfernung aufbauen (de Tilly 1868, Blichfeldt 1902, Kagan 1902, Pieri 1908). Dann wird auf die Frechetsche These eingegangen und eine Reihe von Beispielen für metrische Räume diskutiert (außer trivialen Beispielen die von Minkowski, Hilbert, Barbilian eingeführten Metriken, die normierten linearen Räume, der Hilbertsche Raum, der universelle metrische Raum von Urysohn). In den folgenden Kapiteln werden die neueren Arbeiten besprochen, soweit sie sich aus den Mengerschen „Untersuchungen über allgemeine Metrik“ [I, II,

III, Math. Ann. 100 (1928); IV, Math. Ann. 103 (1930)] entwickelt haben. Da diese Arbeiten hier bereits besprochen worden sind, werden Stichworte genügen: Zwischenpunkte und Konvexität eines metrischen Raumes, Strecken, Konvexifizierbarkeit, geodätische Verlängerung, konvexe Hüllen, 2-, 3-, 4-Tripel-Eigenschaft; Charakterisierung der Teilmengen des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes durch Forderungen

über das Vorzeichen der Determinanten  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (p_i p_j)^2 \end{vmatrix}$ ,  $i, j=2, \dots, k \leq n+1$  und durch

die  $(n+3)$ -Punkt-Eigenschaft, die bei Konvexität des Raumes eintretende Reduktion dieser Bedingung, das Entsprechende für gewisse andere Räume; Pseudo- $S_{n,r}$ -Mengen, „metric transforms“; die zu halblearen, normierten Abelschen Gruppen gehörigen metrischen Räume, Metrik auf gewissen allgemeineren Gruppen, Anwendungen auf Determinantentheorie. Es folgen dann die metrische Definition der Krümmung einer Kurve und ihr Vergleich mit anderen Definitionen (hier sind die Zitate irreführend, da dieser Paragraph [V 1] außer der obigen Definition nichts enthält, das nicht jedem geläufig wäre, der sich mit dieser Art Differentialgeometrie je befaßt hat), die Waldsche Charakterisierung der Flächen mit stetiger Gaußscher Krümmung (geodätisch metrisiert) unter den kompakten konvexen metrischen Räumen. Dann werden die Mengerschen Arbeiten zur metrischen Behandlung der Variationsrechnung besprochen. Endlich werden  $n$ -dimensionale Metriken behandelt, das sind solche, wo nicht einem Punktpaar, sondern einem  $(n+1)$ -Tupel von Punkten eine reelle Zahl ( $n$ -dimensionaler Abstand) zugeordnet wird; die Axiome sind natürlich den für das Volumen des  $n$ -dimensionalen Simplexes gültigen Beziehungen nachgebildet. Daher schließt auch der Bericht mit den verschiedenen paradox klingenden Beispielen von Hausdorff, Banach, Tarski u. a., z. B. für zwei punktfremde Mengen, die untereinander kongruent sind und deren jede auch der Summe der beiden Mengen kongruent ist.

Herbert Busemann (Princeton, N. J.).

**Haller, Hans:** Über die  $K_3$ -Schmiegegebilde der ebenen Bogen von der  $K_3$ -Ordnung drei. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 69, 215—218 (1937).

Verf. betrachtet ein System von  $\mathfrak{R}_3$ -Grundgebilden (Kurven bzw. Bogen)  $K_3$ , welche durch Vorgabe von drei verschiedenen Punkten eines beschränkten Bereiches in der Ebene eindeutig bestimmt sind, und untersucht die Eigenschaften der  $\mathfrak{R}_3$ -Schmiegegebilde der Bogen  $B_3$ , die in bezug auf  $K_3$  die  $\mathfrak{R}_3$ -Ordnung drei haben. So wird — unter anderem — der folgende Satz von J. Hjelmslev (Förhandlingar Åttonde skandinav. Matematikerkongr. Stockholm 1934, S. 10; dies. Zbl. 12, 33) verallgemeinert: Jeder ebene Bogen von der zyklischen Ordnung drei ist notwendig differenzierbar und besitzt in jedem Punkte einen einseitig bestimmten Schmiegekreis, dessen Größe monoton variiert. Verf. spricht Vermutungen auch für die allgemeinen Fälle aus, wo die Zahl  $k = 2n + 1$  oder  $k = 2n$  die Rolle der Zahl 3 übernimmt. Sz. Nagy (Szeged).

**Haupt, Otto:** Über den Begriff des Gebildes von endlicher linearer Ordnung im  $n$ -dimensionalen Raum. S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen 69, 241—246 (1937).

Verf. erklärt im (euklidischen oder projektiven)  $n$ -dimensionalen Raume  $E_n$  eine Realitätsordnung  $L_1^{(n)}$  als obere Grenze der Mächtigkeit des Durchschnittes der betrachteten Punktmenge mit den Geraden von  $E_n$ . Sind die Ordnungscharakteristiken Hyperebenen von  $E_n$ , so wird die Ordnung mit  $L_{n-1}^{(n)}$ -Ordnung bezeichnet. Es handelt sich um möglichst umfassende und zugleich genügend interessante Klasse von Gebilden endlicher  $L_1^{(n)}$ -Ordnung oder  $L_{n-1}^{(n)}$ -Ordnung zu beschreiben. — Jedes Kontinuum von endlicher  $L_{n-1}^{(n)}$ -Ordnung erweist sich als abgeschlossene Hülle einer Summe abzählbar vieler  $L_{n-1}^{(n)}$ -Ordnungshomogener Bogen. Ein entsprechender einfacher Satz ist für die  $L_1^{(n)}$ -Ordnung nicht zu erwarten. Z. B. besitzt jeder noch so verwickelte Bogen auf der Kugel die  $L_1^{(3)}$ -Ordnung zwei. — Nach der analytischen Definition des einfachen Flächenstückes und des Schnittpunktes bezüglich eines Geradenbüschels in  $E_3$ , ferner nach der Definition der in jedem Punkte lokal undurchlässigen perfekten Mengen  $\mathfrak{M}$  wird der folgende Satz bewiesen: Jede perfekte Menge  $\mathfrak{M}$  des  $E_3$ , welche in jedem Punkte



einer auf  $\mathfrak{M}$  offenen dichten Menge sowohl von endlicher  $L_1^{\oplus}$ -Ordnung als lokal undurchlässig ist, läßt sich als abgeschlossene Hülle einer Summe von abzählbar vielen elementaren Flächenstücken darstellen. — In diesem Satze läßt sich der Begriff des Schnittpunktes durch den des lokalen Schneidungspunktes ersetzen. Der Punkt  $P$  der perfekten Menge  $\mathfrak{N}$  heißt dann lokaler Zerschneidungspunkt, wenn für jede hinreichend kleine Umgebung  $\mathfrak{U}$  von  $P$  im  $E$  die Menge  $(\mathfrak{U} - \mathfrak{N})$  mindestens zwei (mehrpunktige) Komponenten besitzt.  
Sz. Nagy (Szeged).

### **Topologie:**

Fröhlich, W.: Beiträge zur Theorie der Zöpfe. II. Die Lösung des Transformationsproblems für eine besondere Klasse von Viererzöpfen. Math. Ann. 116, 281—296 (1938).

Die in der in dies. Zbl. 15, 276 referierten Arbeit erzielten Resultate werden auf Zöpfe aus 4 Fäden angewendet und ein finites Verfahren für das a. a. O. näher bezeichnete Transformationsproblem bei Viererzöpfen entwickelt. (I. vgl. dies. Zbl. 18, 176.)  
K. Reidemeister (Marburg a. L.).

Kawada, Yukiyosi: Über die Riemannsche Fläche algebraischer Funktionen. Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 160—165 (1938).

$K$  sei ein topologischer Körperraum, der algebraisch abgeschlossen ist und in dem Hausdorffs Trennbarkeits- und erstes Abzählbarkeitsaxiom gelten. Weiter gelte: Wenn die Folge  $a_i$  von Elementen in  $K$  entweder gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert oder keine konvergente Teilfolge besitzt, so konvergiert die Folge  $a_i b_i$  nur dann gegen Null, wenn die  $b_i$  gegen Null konvergieren (Nullteilerfreiheit des derivierten Bereichs). — Ist dann  $A = K(x, y)$  ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen mit Koeffizienten aus  $K$ , so werde die Riemannsche Fläche  $R_A$  — wie üblich — als Bereich aller Primdivisoren von  $A$  über  $K$  erklärt. Ist  $K < B \leq A$ , so induziert jeder Primdivisor von  $A$  über  $K$  in  $B$  einen Primdivisor von  $B$  über  $K$ . Diese „Projektion“ von  $R_A$  auf  $R_B$  ist eine doppelstetige Abbildung. Ist insbesondere  $B = K(z)$ , so sind  $K$  und die irgendwie punktierte  $R_B$  homöomorph. — Allgemein gilt:  $R_A$  ist ein Hausdorffscher Raum, der mit  $K$  im kleinen homöomorph ist und also das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.  $R_A$  ist dann und nur dann zusammenhängend bzw. kompakt bzw. erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn  $K$  zusammenhängend bzw. der Körper aller komplexen Zahlen ist bzw. das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. — Schließlich sei noch bemerkt, daß alle Automorphismen von  $A$ , die die Elemente von  $K$  invariant lassen, topologische Abbildungen von  $R_A$  induzieren.  
Reinhold Baer.

Kagno, I. N.: Perfect subdivision of surfaces. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 17, 76—111 (1938).

Fortsetzung von Untersuchungen des Verf. im J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 15, 179—186 (1936). Die Schlüssigkeit eines der dort gegebenen Beweise war hier (dies. Zbl. 16, 184) angezweifelt worden. Verf. hat inzwischen den Irrtum erkannt. Mit Hilfe einer tiefergehenden kombinatorischen Analyse beweist er den Satz für gewisse Klassen von Fällen.  
Friedrich Levi (Calcutta).

Rueff, Marcel: Beiträge zur Untersuchung der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Compositio Math. 6, 161—202 (1938).

Mit einer Abbildung  $f$  eines Komplexes  $L$  in einen anderen  $M$  ist eine homomorphe Abbildung der Homologiegruppen von  $L$  in die entsprechenden von  $M$  verbunden, welche den „Homologietypus“ von  $f$  bestimmt. Für  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten  $L, M$  bestehen für den Homologietypus einer Abbildung Einschränkungen, z. B. der Satz von Hopf über den Abbildungsgrad  $c$ : Nur dann kann es Abbildungen mit  $c \neq 0$  geben, wenn die Bettischen Zahlen von  $M$  nicht größer als die von  $L$  sind. Der Verf. zeigt für den Fall gegenseitiger Abbildbarkeit allgemeiner, daß die vollen Homologiegruppen von  $L$  und  $M$  übereinstimmen, und beweist weitere Sätze ähnlicher Art. Als Hilfsmittel werden herangezogen der Hopfsche Umkehrungshomomorphismus,

eine Operation  $R$ , welche die  $k$ -te Bettische Gruppe mod  $m$  zweiter Art in die  $(k-1)$ -te Torsionsgruppe isomorph abbildet, ferner in den Fällen  $n \equiv 2, 0 \pmod{4}$  die Bilinearform  $S$  der Eigenschnittzahlen der  $\frac{n}{2}$ -ten Bettischen Gruppe, in den Fällen  $n \equiv 1, 3$  die Bilinearform  $T$  der Eigenverschlingungszahlen der  $\frac{n-1}{2}$ -ten Torsionsgruppe. Für  $n \equiv 2, 1$  ist  $S$  bzw.  $T$  antisymmetrisch, beide Formen lassen sich auf Normalformen bringen (für  $T$  vgl. de Rham, Thèse, § 19; dies. Zbl. 2, 34). Daraus ergeben sich bekannte Einschränkungen für die Homologiegruppen einer Mannigfaltigkeit: Für  $n \equiv 2$  ist  $p_n$  gerade (Poincaré) (übrigens die einzig bekannte wesentliche Einschränkung für die Bettischen Zahlen); für  $n \equiv 1$  ist die zu einer Primzahl  $p \neq 2$  gehörige Basiszahl (Anzahl der Basiselemente mit durch  $p$  teilbarer Ordnung) der  $\frac{n-1}{2}$ -ten Torsionsgruppe gerade (wählt man als Koeffizientenbereich den Restklassenkörper mod  $p$ , so ist diese Aussage im wesentlichen in der vorigen enthalten; Verschärfungen bei de Rham, loc. cit.). In den Fällen  $n \equiv 0, 3$  sind  $S$  und  $T$  symmetrisch und enthalten weitere Invarianten, und die Untersuchung ihres Verhaltens bei einer Abbildung  $f$  liefert Sätze folgender Art, z. T. Verallgemeinerungen von Resultaten von Seifert, Threlfall, de Rham. Für  $n \equiv 0$ : Ist  $p_n$  ungerade, so ist bei Selbstabbildungen  $c$  Quadratzahl; ist der Trägheitsindex von  $S \neq \frac{1}{2} p_n$ , so ist die Mannigfaltigkeit asymmetrisch. Für  $n \equiv 3$ :

Ist die zu  $p \neq 2$  gehörige Basiszahl ungerade, so ist  $c$  quadratischer Rest mod  $p$ . Es werden spezielle Mannigfaltigkeiten angegeben, für deren Abbildungsgrade nur in Frage kommen positive Zahlen, Summen und Differenzen zweier Quadratzahlen, quadratische und  $k$ -te Potenzreste. Wie der genannte Hopfsche Satz und seine Erweiterung Kriterien für Nichthomöomorphie in sich enthalten, so umfassen diese Sätze Kriterien für Asymmetrie. Demgegenüber zeigt das Beispiel der dreidimensionalen Linsenräume, deren mögliche gegenseitigen Abbildungsgrade vollständig angegeben werden, daß Homologiebetrachtungen für das Homöomorphieproblem nicht ausreichen. Bei Linsenräumen  $L_m(q)$  und  $L_m(q')$  mit demselben Drehnenner  $m$  treten alle und nur diejenigen Grade  $c$  auf, deren quadratischer Restcharakter mod  $m$  gleich  $q \cdot q'$  ist. Bei Hinzunahme des anderweitig bekannten Homöomorphieverhaltens ergibt sich die Existenz von Linsenräumen, die gegenseitige Abbildungen vom Typus der Homöomorphie, insbesondere also vom Grad  $c = 1$ , gestatten, ohne jedoch homöomorph zu sein. Damit wird eine von Hopf gestellte Frage beantwortet. Für höherdimensionale Linsenräume werden nur die Selbstabbildungsgrade vollständig aufgeführt, wiederum ohne die anderweitig beantwortete Frage nach Asymmetrie zur Entscheidung zu bringen. — Der Anhang enthält einen Satz über faserungstreue Abbildungen der Sphäre.

Wolfgang Franz (Gießen).

Eilenberg, Samuel: Sur le prolongement des transformations en surfaces sphériques. Fundam. Math. 31, 179—200 (1938).

Für die Untersuchung der Lage zweier fremder, abgeschlossener Teilmengen  $X$  und  $Y$  einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  zueinander kann man u. a. auch die eindeutigen, stetigen Abbildungen  $f$  von  $X$  in einen geeigneten Raum  $R$  und ihre Fortsetzbarkeit auf  $M - Y$  studieren. Verf. wählt für  $M$  einen kompakten, metrischen Raum  $X + Q + Y$ , wobei  $X$  und  $Y$  abgeschlossene Mengen sind und  $Q$  eine  $n$ -dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit ist; für  $R$  wählt er die  $m$ -dimensionale Sphäre  $S^m$ . Verf. sucht hinreichende Bedingungen für die Fortsetzbarkeit aller stetigen Abbildungen von  $X$  in die  $S^m$  auf  $M - Y$ . Ein Ergebnis möge formuliert werden. Zunächst wird eine höchstens abzählbare, abelsche Gruppe  $(m^i)$  definiert, deren Elemente die Klassen homotoper stetiger Abbildungen der  $S^i$  in die  $S^m$  sind; das Nullelement ist die Klasse der nichtwesentlichen Abbildungen; mit  $(m^i)^*$  wird die zu  $(m^i)$  orthogonale, kom-



pakte, topologische Gruppe bezeichnet [Pontrjagin, Ann. of Math. 35, 369 (1934); s. dies. Zbl. 9, 156]. Setzen wir nun  $G^i$  gleich der Homologiegruppe der konvergenten  $(i+1)$ -dimensionalen Zyklen mod  $X$  von  $M - Y$  mit Koeffizienten aus  $(m^i)^*$ , so beweist Verf.: Ist  $G^i = 0$  für  $i = m, \dots, n-1$ , so ist jede stetige Abbildung  $f(X) \subset S^m$  fortsetzbar zu einer Abbildung  $f(M - Y) \subset S^m$ . Verf. untersucht genauer noch den Fall, daß  $M$  und  $X$  bzw.  $M$ ,  $X$  und  $Y$  Sphären sind. Nöbeling (Erlangen).

Klipple, E. C.: Two-dimensional spaces in which there exist contiguous points. Trans. Amer. Math. Soc. 44, 250—276 (1938).

The author makes a study of spaces satisfying a system of axioms set up previously by R. L. Moore [Rice Inst. Pamphlet 23, no. 1 (1936); see Axioms  $A, B, C, 0, 1, 2$ ] and in which contiguous points are admitted. A triune is defined as a triple of points each pair of which are contiguous. The author adds the axiom that the Jordan Curve Theorem be satisfied for triunes as well as for simple closed curves and proves numerous results concerning the relation between a simple closed curve or a triune and its complement. For example: If  $p$  is a point of the product  $I$  of the interiors of a finite number of simple closed curves or triunes  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , there exists a simple closed curve or a triune  $J$  in  $J_1 + J_2 + \dots + J_n$  whose interior contains  $p$  and is contained in  $I$ . The axiom that any two distinct non-contiguous points be separated by a simple closed curve or a triune is added; and on this basis results such as the Phragmén-Brouwer Theorem, Janiszewski-Mullikin Theorems, and Zoratti Theorem for the plane are proven. Whyburn (Charlottesville).

Pospíšil, Bedřich: Théorèmes d'existence pour les caractères des points. Čas. mat. fys. 67, 249—254 (1938).

A system  $H$  of neighborhoods of a subset  $S$  of a space  $E$  is called (I) complete, (II) pseudo-complete or, (III) quasi-complete, provided that if  $C$  is the common part of all the neighborhoods in the system  $H$  and  $G$  is an arbitrary neighborhood of  $S$  in  $E$ , we have, respectively, (I) some set  $U$  of  $H$  with  $U \subset G$ , (II)  $C \subset G$ , or (III)  $G - C \neq 0$ . The smallest power of a complete, pseudo-complete or quasi-complete system of neighborhoods of  $S$  is called, respectively, the character, pseudo-character, or quasi-character of  $S$ . A study is made of these notions as applied to spaces satisfying various ones of the axioms  $A, B, C, D$  of Hausdorff. Whyburn (Charlottesville).

Simond, R. G.: Relations between certain continuous transformations of sets. Duke math. J. 4, 575—589 (1938).

A study is made of types of transformations closely related to arc-preserving and irreducible transformations previously studied by the reviewer (see Amër. J. Math. 58, 305—312; this Zbl. 14, 40). A continuous transformation  $T(A) = B$  is arc-preserving (tree-preserving) provided the image of every non-degenerate arc (tree) in  $A$  is an arc (tree) or a point;  $T$  is true arc-preserving (true tree preserving) if the single-point-image case is excluded; if  $A$  is a continuum,  $T$  is irreducible (strongly irreducible) provided no proper subcontinuum (closed subset) of  $A$  maps onto all of  $B$ . It is shown that if  $A$  is a locally connected continuum, every true arc-preserving strongly irreducible transformation on  $A$  is necessarily a homeomorphism; the same conclusion holds if  $A$  is cyclic and contains a free arc when "tree-preserving" and "irreducible" are substituted for "true arc-preserving" and "strongly irreducible". Furthermore, every arc-preserving transformation on a locally connected continuum  $A$  is tree-preserving on  $A$ ; and if  $A$  is a tree, every true arc-preserving transformation is contracting on  $A$ , i.e., the image of  $A$  homeomorphic with a subset of  $A$ . Whyburn.

Borsuk, Karol: Sur un problème de MM. Kuratowski et Ulam. Fundam. Math. 31, 154—159 (1938).

Two compact sets  $X$  and  $Y$  are said to be quasi-homeomorphic provided that for any  $\varepsilon > 0$  there exists a continuous  $\varepsilon$ -transformation of either of them onto the other (see Kuratowski and Ulam, Fundam. Math. 20, 252; this Zbl. 6, 371). In connection with a question raised by Kuratowski and Ulam it is shown that if



an absolute neighborhood retract  $X$  admits a continuous fixed-point-free transformation into a subset of itself, the same is true of any set quasi-homeomorphic with  $X$ . That this does not hold for compact sets  $X$  in general is shown by means of an example of a continuum  $A$  which admits a fixed-point-free homeomorphism into itself but which nevertheless is quasi-homeomorphic with the 3-dimensional cube. Since  $A$  incidentally is not locally 1-connected, not locally contractible, not an absolute retract and its fundamental group does not vanish, it follows that these properties are also not invariant relative to quasi-homeomorphisms. *Whyburn* (Charlottesville).

**Steenrod, Norman E.:** Remark on weakly convergent cycles. *Fundam. Math.* **31**, 135—136 (1938).

The author shows that in a compact metric space  $K$  the homology groups based on weakly convergent cycles as used by Borsuk [see *Fundam. Math.* **29**, 208 (1937); this *Zbl.* **17**, 134] with weak homologies are identical with the homology groups based on convergent cycles with weak homologies. This is effected by showing that any weakly convergent cycle in  $K$  contains a subsequence which is convergent. *Whyburn*.

**Yamauchi, Shozo:** Ein Dualitätssatz der Überdeckungen von Kompaktum. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. **20**, 513—516 (1938).

Following Komatu (see this *Zbl.* **16**, 420) upper and lower  $k$ -dimensional Betti groups  $B_0^k(F, \alpha)$  and  $B_k^k(F, \alpha)$  respectively for a compact subset  $F$  of Euclidean space  $R^n$  and coefficient group  $\alpha$  are set up by means of a sequence of coverings of  $F$  and it is shown that the groups  $B_0^k(F, \alpha)$  and  $B_n^{n-k}(F, \alpha)$  are isomorphic. *Whyburn*.

## Mechanik.

### Analytische Mechanik, Ergodenprobleme:

**Kampen, E. R. van, and Aurel Wintner:** On the reduction of dynamical systems by means of parametrized invariant relations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **44**, 168—195 (1938).

The classical theory of the reduction of canonical dynamical systems with  $n$  degrees of freedom postulates the knowledge of a function-group of first integrals. In the present paper a more general problem is considered, in which instead of first integrals we are given "invariant relations", a notion which is due to Jacobi and is of importance in the work of Poincaré, Birkhoff, and Levi-Civita; this generalisation arises quite naturally in various applications, e. g. in the Problem of Three Bodies. The method here given depends on a parametrisation of the system of invariant relations, the parametrisation being symmetrical with respect to the  $n$  coordinates and the  $n$  momenta.

*Whittaker* (Edinburgh).

**Weyl, Hermann:** Mean motion. *Amer. J. Math.* **60**, 889—896 (1938).

1914 bewies der Verf. (*L'Enseignement mathématique* **16**), daß für ein beliebiges trigonometrisches Polynom  $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{2\pi i(\lambda_k t + \alpha_k)}$  mit linear unabhängigen Frequenzen  $\lambda_k$  eine mittlere Bewegung  $\mu$  existiert:

$$\arg f(t) = \mu t + o(t),$$

und wies nach, daß

$$\mu = W_1 \lambda_1 + \dots + W_n \lambda_n,$$

wo die Koeffizienten  $W_k$  nur von den Amplituden  $a_1, \dots, a_n$  abhängen,  $\geq 0$  sind und die Summe 1 haben. Veranlaßt durch eine Arbeit von Hartman, van Kampen u. Wintner (dies. *Zbl.* **16**, 235) gibt der Verf. eine ausführlichere Darstellung seines alten Beweises und zeigt, daß  $W_k$  die von dem Irrfahrtproblem bekannte Wahrscheinlichkeit der Ungleichung

$$\left| \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n a_l e^{2\pi i \theta_l} \right| < a_k$$



ist (vgl. Watson, Bessel functions, S. 411, 414 u. 420), ein Resultat, das von Wintner vermutet und in den Fällen  $n = 3, 4$  bewiesen worden war. *B. Jessen.*

**Jouguet, Émile:** Relations entre le problème de la stabilité séculaire et celui des vitesses critiques. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 649—652 (1938).

Der Verf. betrachtet ein mechanisches System mit  $n$  Koordinaten  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), die in die kinetische und potentielle Energie zugleich mit ihren Ableitungen  $\dot{q}_i$  eingehen und einer weiteren Koordinate  $r$ , die nur durch ihre Ableitung  $\dot{r}$  vorkommt, also gyroskopisch (oder ignorable) ist. Für die stationären Bewegungen, die durch  $q_i = a_i = \text{konst.}$  und  $\dot{r} = \omega = \text{konst.}$  gegeben sind, nehmen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eine besonders einfache Gestalt an. Für besondere Werte von  $\omega$  können ausgezeichnete Zustände auftreten, die als kritische Geschwindigkeiten „der Unmöglichkeit“, „der Unbestimmtheit“ und „der Resonanz“ unterschieden werden. Diese Unterscheidung ist nicht absolut, sondern hängt von der Wahl der Koordinaten ab. Diese Begriffe werden in Beziehung gebracht zu denen der gewöhnlichen und der sekularen Stabilität, wobei nach der Ausdrucksweise des Verf. die sekulare Stabilität durch die Tatsache gekennzeichnet ist, daß sie sich erhält, wenn die Veränderlichen  $q_i$  „steif“ werden (franz.: visqueuses, zäh). — Es gelten dann Aussagen von folgender Art: Wenn bei bestimmten Werten von  $a_i$  und  $\omega$  der Stabilitätscharakter von sekularer zu gewöhnlicher übergeht, so ist  $\omega$  eine kritische Geschwindigkeit der Unbestimmtheit, u. dgl. — Die eingeführten Begriffe werden auf zwei Beispiele angewendet: Das Gyroskop und die mit einer Drehmasse besetzte umlaufende Welle. Für das zweite Beispiel ist bemerkenswert, daß der Verf. für sehr steife Wellen eine kritische Geschwindigkeit der Resonanz vom Betrage  $\Omega/\sqrt{2}$  findet und vermutet, daß diese von A. Stodola bei seinen Untersuchungen beobachtet wurde und nicht  $\Omega/2$ ; die beobachteten Werte waren 2336 und 1650 U/min.

*Th. Pöschl (Karlsruhe).*

**Morse, Marston, and Gustav A. Hedlund:** Symbolic dynamics. Amer. J. Math. **60**, 815—866 (1938).

In the study of recurrence and transitivity in dynamical systems the usual method is a combination of classical differential analysis with more abstract symbolic analysis. The purpose of the present paper is to develop the symbolic theory on its own account. "A symbolic trajectory  $T$  is formed from symbols taken from a finite set of generating symbols subject to rules of admissibility which are dependent on the underlying Poincaré fundamental group. The trajectory  $T$  taken with one of its symbols is called a symbolic element. Symbolic elements are analogues of line elements on an ordinary trajectory." As a sample of the work, the following may be quoted. The recurrency index  $R(n)$  of  $T$  is the minimum number  $m$  such that each block of  $m$  successive symbols of  $T$  contains every block of  $n$  successive symbols of  $T$ , and if  $R(n)$  exists for each  $n$ ,  $T$  is termed recurrent. A typical condition is that  $R(n) > 2n$  for every non-periodic recurrent  $T$ .  $R(n)$  is obtained explicitly for the Morse recurrent trajectory [Trans. Amer. Math. Soc. **22**, 95 (1921)], and it is shown that  $R(n)/n$  has an inferior limit 5,5 and a superior limit 10. The paper continues with a study of transitivity and the ergodic function of a ray, and ends with a list of seven unanswered questions.

*J. L. Synge (Toronto).*

### **Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:**

**Brown, Ernest W.:** The equations of motion of the moon. Amer. J. Math. **60**, 785—792 (1938).

Verf. benutzt zur Darstellung der Mondbewegung ein rotierendes Koordinatensystem, das der mittleren Bewegung des Mondes um die Erde folgt und dessen  $x$ -Achse stets in der Richtung des mittleren Mondortes liegt. Die Koordinaten in diesem System seien  $a + x, y$  ( $a$  halbe große Achse der Mondbahn), es sind daher  $x, y$  stets klein und daher Entwicklungen danach möglich. Es zeigt sich, daß in erster Näherung die Gleichung in  $x$  kein  $y$  enthält, was die Reihenentwicklung erleichtert. Ferner ist die



niedrigste Potenz von  $n'$ , die im Nenner auftritt, die zweite anstatt der ersten wie bei Hill, die Glieder werden also rascher kleiner. Ferner ist der Verlust an Genauigkeit infolge kleiner Divisoren auch nur gering.  
G. Schrutka (Wien).

**Garavito, Julio A.:** Eine elementare Darstellung der Olbersschen Methode zur Berechnung von Kometenbahnen. *Rev. Acad. Colomb. Ci. exact. etc.* 2, 241—254 (1938) [Spanisch].

Verf. gibt eine elementare Herleitung der Keplerschen Bewegung aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz (er betrachtet hierbei auch den Fall geradliniger Bewegung) und eine Darlegung der Olbersschen Methode.  
G. Schrutka (Wien).

**Fabre, Hervé:** Les mouvements récurrents en mécanique céleste, et la variation des éléments des orbites. *Bull. Astron., Paris* 10, 297—410 (1937); et 11, 17—136 (1938).

**Moisseiev, N.:** Sur la convergence des séries représentant formellement des solutions simple-périodiques. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s.* 18, 533—536 (1938).

The dynamical systems considered are of the type of the restricted problem of three bodies, governed by the differential equations

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 + 2nr\dot{\theta} + U_r, \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - 2n\frac{\dot{r}}{r} + \frac{1}{r^2}U_\theta, \\ n &= \text{const}, \quad U = U(r, \theta).\end{aligned}$$

The fourier coefficients of the development of the polar equation of any possible direct closed orbit may be obtained formally as functions of  $h$ , the constant of Jacobi. Let  $N(h)$  denote the number of series obtained by this formal process. Let  $N^c(h)$  denote the number of these series which converge; and let  $M(h)$  denote the number of regions of Whittaker with respect to a family of simple closed curves about  $r = 0$ . It is shown that  $M(h) \leq N^c(h)$  and that, if  $M(h) = N(h)$ , each region contains one and only one direct closed orbit. The case of retrograde orbits admits similar results. Applications are made.  
D. C. Lewis (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

**Rein, N.:** Sur le développement de la méthode pour évaluer la période d'une solution du problème restreint des trois corps. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s.* 19, 33—35 (1938).

Die Verf. leitet Ungleichungen her, die aus der Integraldarstellung der Periode folgen; vgl. dies. Zbl. 17, 284 u. 381.  
Wintner (Baltimore).

**Rein, N.:** Sur un schème simplifié du problème restreint elliptique des trois corps. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s.* 19, 37—40 (1938).

Es wird vorgeschlagen, das Potential der Gravitationskräfte durch seinen säkularen Mittelwert zu ersetzen.  
Wintner (Baltimore).

**Hagihara, Yusuke:** Sur la réduction des équations différentielles dans le problème des  $n$  corps. *C. R. Acad. Sci., Paris* 207, 390—393 (1938).

Six first integrals which are mutually in involution are explicitly produced in a particularly simple manner for the classic reduction of the problem of  $n$  bodies.

D. C. Lewis (Ithaca, N. Y., USA.).

**Wavre, Rolin:** Sur une méthode de M. Volterra et un théorème de M. Dive relatif aux masses fluides. *C. R. Acad. Sci., Paris* 207, 460—462 (1938).

Für den Volterraschen Satz über die Unmöglichkeit einer in homothetischen Ellipsoiden geschichteten Gleichgewichtsfigur rotierender heterogener Flüssigkeit gibt es eine einfache Beweismethode von Pizzetti. Diese läßt sich, wie Verf. ausführt, auch zu einem einfachen Beweis des Satzes von Dive verwenden, wonach eine Schichtung in konzentrischen Ellipsoiden für eine barotrope Rotation unmöglich ist.

E. Hölder (Leipzig).